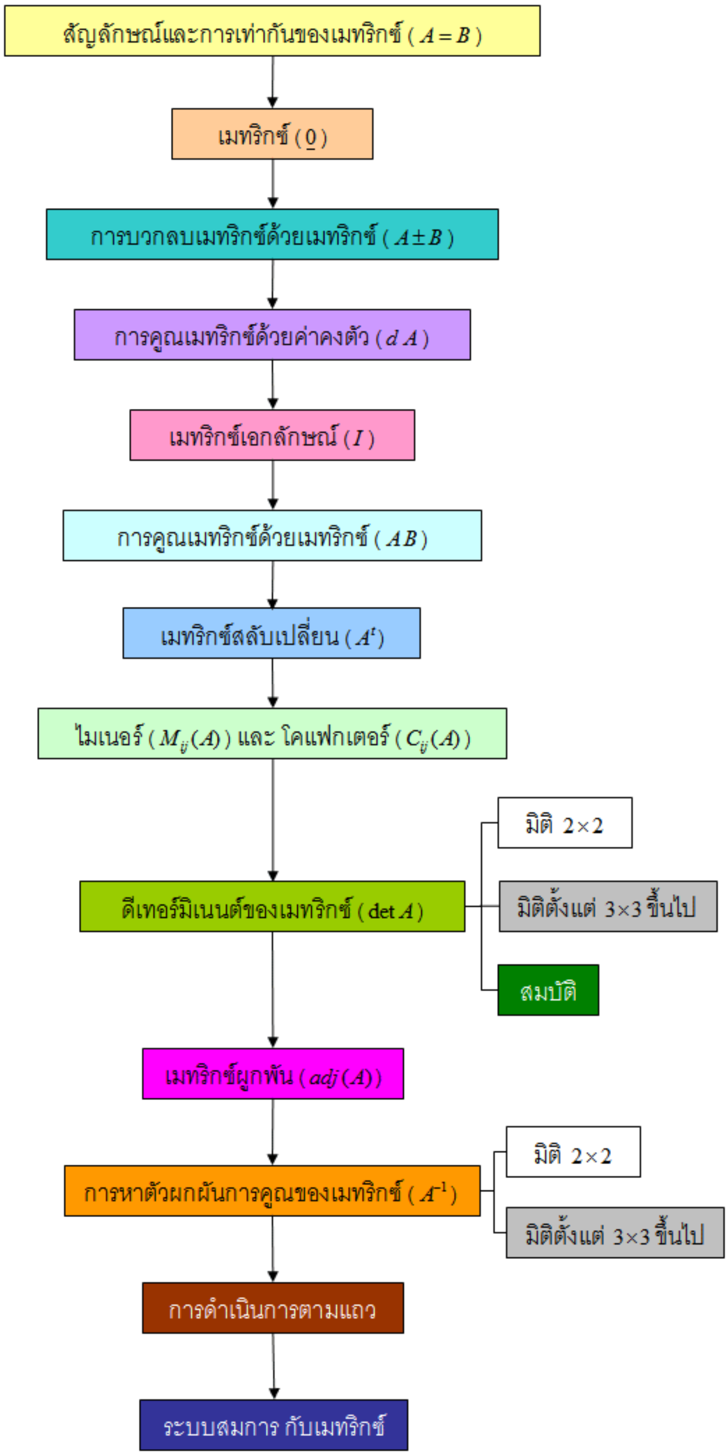
เมทริกซ์ ม.4 เทอมปลาย สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม



สัญลักษณ์และการเท่ากันของเมทริกซ์

สัญลักษณ์ของเมทริกซ์

ให้ A เป็นเมทริกซ์ ที่มี มิติ $m \times n$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{มี } n \text{ หลัก}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} \text{มี } m \text{ แถว}$$

หรือ $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ โดยที่ a_{ij} คือค่าที่อยู่ในตำแหน่ง แถวที่ i หลักที่ j

เช่น $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

มีมิติ 2×2

$a_{11} = -1,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 1$

การเท่ากันของเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์

$A = B$

ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเท่ากัน และ

ค่าที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันใน A และ B มีค่าเท่ากัน

เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A = B$ จะได้ว่า $w = 1,\ x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

เมทริกซ์ศูนย์ ($\underline{0}_{m\times n}$ หรือ $\underline{0}$)

เมทริกซ์ศูนย์ **คือ** เมทริกซ์ที่สมาชิกในทุกตำแหน่งมีค่าเป็น 0

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

การบวกลบเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

บวกลบเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ โดย

มิติเท่ากัน และ ค่าที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันบวกลบกัน

เช่น

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

สมบัติ

ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ มิติ $m \times n$

1) $A+B$ จะมีมิติเป็น $m \times n$

2) $A+B = B+A$

3) $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$

4) $A+\underline{0} = \underline{0}+A = A$ (โดย $\underline{0}$ เป็นเอกลักษณ์การบวก)

5) $A+(-A) = (-A)+A = \underline{0}$ (โดย $-A$ เป็นตัวผกผันการบวกของ A)

การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว

นำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์

เช่น ให้ k เป็นค่าคงตัว

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\times a & k\times b \\ k\times c & k\times d \end{bmatrix}$$

สมบัติ

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ และ c, d เป็นค่าคงตัว

1) $c(A+B) = cA + cB$

2) $(c+d)A = cA + dA$

3) $(cd)A = c(dA) = d(cA)$

4) $0A = \underline{0}$

5) $1A = A$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (I_n มีมิติ $n\times n$)

$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

สมบัติ

ถ้า A เป็น $n\times n$ เมทริกซ์

จะได้ว่า $I_n A = A I_n = A$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

$A_{m_1\times n_1}\cdot B_{m_2\times n_2}$

ขั้นตอน

1) จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อ $n_1=m_2$

2) ผลคูณมีมิติเป็น $m_1\times n_2$

3) จะได้

$A_{m_1\times n_1}\cdot B_{m_2\times n_2}=\left[a_{ij}\right]_{m_1\times n_2}$

โดยหา a_{ij} ได้จาก

นำแถวที่ i ของ A คูณกับ หลักที่ j ของ B (คูณกันแบบเรียงตัว)

แล้วนำผลคูณที่ได้มาบวกกัน

สมบัติ

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$, $C=\left[c_{ij}\right]_{p\times q}$

1) $AB\neq BA$ (บางกรณี $AB=BA$)

2) $ABC=(AB)C=A(BC)$ เปลี่ยนกลุ่มได้แต่ห้ามสลับตำแหน่ง

3) $AI_n=A,\ I_mA=A$ (I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์)

4) $\underline{0}_{p\times m}A=\underline{0}_{p\times n}$ และ $A\underline{0}_{n\times p}=\underline{0}_{m\times p}$

5) $A(B+C)=AB+AC$ และ $(A+B)C=AC+BC$

6) $dAB=(dA)B=A(dB)=d(AB)$ โดย d เป็นค่าคงตัว

7) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ก็ต่อเมื่อ $AB=BA$

8) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ ก็ต่อเมื่อ $AB=BA$

9) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ ก็ต่อเมื่อ $AB=BA$

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (A^t)

A^t **เรียกว่า** “ทรานสโพสของเมทริกซ์ A”

การทำ A ให้เป็น A^t ทำได้โดย

นำแถวที่ 1 ของ A มาเป็นหลักที่ 1 ของ A^t

นำแถวที่ 2 ของ A มาเป็นหลักที่ 2 ของ A^t

. .

. .

. .

นำแถวสุดท้าย ของ A มาเป็นหลักสุดท้าย ของ A^t

เช่น

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}_{4\times 2}$

จากแถวที่ 1 ของ A กลายมาเป็นหลักที่ 1 ของ A^t

จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 4}$

A มีมิติ 4×2 จะได้ A^t มีมิติเป็น 2×4

สมบัติ

1) $(A^t)^t = A$

2) $(AB)^t = B^t A^t$

3) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

4) $(cA)^t = cA^t$ ให้ c เป็นค่าคงตัว

5) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

ไมเนอร์ ($M_{ij}(A)$) และ โคแฟกเตอร์ ($C_{ij}(A)$)

ไมเนอร์ $M_{ij}(A)$

คือ ค่าของดีเทอร์มิเนนต์ของเมทริกซ์ ซึ่งได้จากการตัดแถวที่ i

และ ตัดหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก

เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$M_{23}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$$

โคแฟคเตอร์ $C_{ij}(A)$

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j}.M_{ij}(A)$$

เช่น จากตัวอย่างก่อนหน้า

$$\begin{aligned} C_{23}(A) &= (-1)^{2+3}.M_{23}(A) \\ &= (-1)^5.(-6) \\ &= (-1).(-6) = 6 \end{aligned}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ ($\det A, |A|$)

เมทริกซ์ 2×2

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

เมทริกซ์ 3×3

ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$-(gec+hfa+idb)$

$+(aei+bfg+cdh)$

$=(aei+bfg+cdh)-(gec+hfa+idb)$

หรือหาค่าดีเทอร์มิเนนต์ โดย $C_{ij}(A)$ และ $M_{ij}(A)$
ทำได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

เลือกแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งมา
สมมุติว่าเลือกแถวที่ 1
จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}.C_{11}(A) + a_{12}.C_{12}(A) + a_{13}.C_{13}(A) \\ &= a_{11}.(-1)^{1+1}.M_{11}(A) + a_{12}.(-1)^{1+2}.M_{12}(A) + a_{13}.(-1)^{1+3}.M_{13}(A) \end{aligned}$$

สมบัติของดีเทอร์มิเนนต์

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ โดยที่ $n\geq 2$

1) $\det A=0$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน เพราะหา A^{-1} **ไม่**ได้

$\det A\neq 0$ เป็นเมทริกซ์**ไม่**เอกฐาน เพราะหา A^{-1} ได้

2) ถ้าสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง ใน A เป็น 0 ทุกตัว

จะได้ $\det A=0$

เช่น $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ หรือ $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ $\det A=0$

3) ถ้า เมทริกซ์ B เกิดจากการสลับกันระหว่าง 2 แถว หรือ 2 หลัก ของ เมทริกซ์ A

จะได้ $\det B=-\det A$

เช่น

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

จะได้ $\det B=-\det A$

4) ถ้า เมทริกซ์ A มีแถว 2 แถว เหมือนกัน หรือ มีหลัก 2 หลัก เหมือนกัน

จะได้ $\det A=0$

เช่น

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

จะได้ $\det A=0$

5) ถ้านำค่าคงตัวไปคูณกับแถวใดแถวหนึ่ง แล้วนำไปบวกหรือลบกับอีกแถวหนึ่ง

จะได้ว่า ค่าดีเทอร์มิเนนต์ของเมทริกซ์ใหม่นั้น**มีค่าเท่าเดิม**

(ระหว่างหลักกับหลักสมบัตินี้ก็ใช้ได้นะ)

เช่น $\begin{vmatrix} a-kc & b-kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

6) ถ้านำค่าคงตัว k ไปคูณกับแถวใดแถวหนึ่งหรือ หลักใดหลักหนึ่งของเมทริกซ์ A

จะได้ว่า ค่าดีเทอร์มิเนนต์ของเมทริกซ์ใหม่ เท่ากับ $k\det A$

เช่น $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

7) $\det(A^t) = \det(A)$

8) $\det(AB) = \det A . \det B$

9) $\det(A^m) = (\det(A))^m$ โดย m เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

10) $\det(kA) = k^n(\det(A))$ โดย A มีมิติ $n \times n$

11) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ โดย $\det(A) \neq 0$

12) $\det(I) = 1$ โดย I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์ผูกพัน ($adj(A)$)

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

จะได้ $adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$

ตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ (A^{-1})

ให้ A มีมิติเป็น $n \times n$ และ A^{-1} จะมีมิติ $n \times n$ ด้วย

จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

การหา A^{-1} ของ เมทริกซ์ มิติ 2×2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะหา A^{-1} ได้ ก็ต่อเมื่อ $ad - bc \neq 0$

และ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

หรือ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.adj(A)$

เทียบกันแล้วจะได้ว่า

$\det(A) = ad - bc$ และ

$adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

การหา A^{-1} ของ เมทริกซ์ มิติ 3×3

ให้ A มีมิติ $n \times n$ โดยที่ $\det(A) \neq 0$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.adj(A)$

สมบัติ

ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีอินเวอร์สการคูณ

1) $AB = AC$ จะได้ $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ จะได้ $IB = IC$ จะได้ $B = C$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$

4) $(kA)^{-1} = k^{-1}.A^{-1} = \dfrac{1}{k}.A^{-1}$

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ และ $(ABC)^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$

การดำเนินการตามแถว

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{5R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5(1) & 5(2) \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{R_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \underset{R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5-(2)3 & 10-(2)4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Note

ถ้า

$$[A \vdots I_n] \sim [I_n \vdots B]$$

จะได้ว่า

$$B = A^{-1}$$

ระบบสมการ กับ เมทริกซ์

สามารถเปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

หลักในการแก้สมการหลายตัวแปรด้วยวิธีธรรมดา

(ถ้าไม่ชอบแก้สมการโดยใช้เมทริกซ์)

เช่น 4 สมการ 4 ตัวแปร ทำให้เหลือ

3 สมการ 3 ตัวแปร ทำให้เหลือ 2 สมการ 2 ตัวแปร แล้ว

ทำให้เหลือ 1 สมการ 1 ตัวแปร