เวกเตอร์ ม.5 เทอมต้น สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับเวกเตอร์

ความหมาย และ สัญลักษณ์

↓

ทิศทางเดียวกัน และทิศทางตรงกันข้าม

↓

การเท่ากันของเวกเตอร์

↓

นิเสธของเวกเตอร์ ($\bar{u}$ & $-\bar{u}$) และเวกเตอร์ศูนย์ ($\bar{0}$)

↓

การบวก และลบเวกเตอร์ แบบ Graphic

↓

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ($k.\bar{u}$) แบบ Graphic

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

การเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

การหาขนาด ($|\bar{u}|$) และ ความชัน ($m_{\bar{u}}$) ของเวกเตอร์

การเท่ากันของเวกเตอร์

นิเสธของเวกเตอร์ ($\bar{u}$ & $-\bar{u}$) และเวกเตอร์ศูนย์ ($\bar{0}$)

การบวก และลบเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ($k.\bar{u}$)

เวกเตอร์ 1 หน่วย ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$)

โคไซน์แสดงทิศทาง

ผลคูณเชิงสเกลาร์ ($\bar{u}.\bar{v}$)

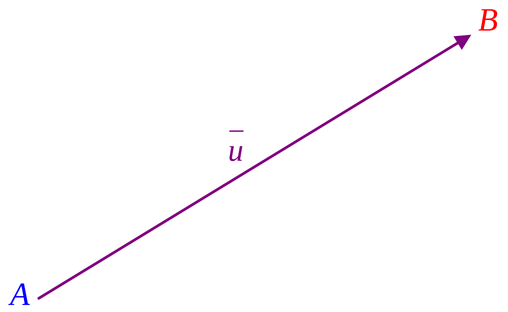
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ($\bar{u}\times\bar{v}$)

พื้นฐาน ม.ต้น ที่ต้องใช้

ความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับเวกเตอร์

ความหมาย และ สัญลักษณ์

เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มี**ขนาด**และ**ทิศทาง**



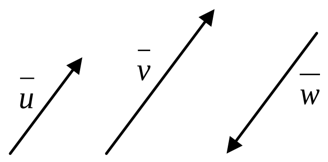
จุดเริ่มต้น คือ A และ จุดสิ้นสุด คือ B

เวกเตอร์จาก A ไป B เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\overrightarrow{AB}$ (หรือ $\bar{u}$)

ทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$ ตามทิศของหัวลูกศร

ขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB ใช้สัญลักษณ์ $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (หรือ $|\bar{u}|$)

ทิศทางเดียวกัน และทิศทางตรงข้ามกัน

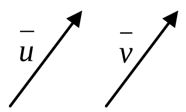


$\bar{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ และ

$\bar{u}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{w}$

การเท่ากันของเวกเตอร์

เวกเตอร์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อมี**ทิศทางเดียวกัน**และ**ขนาดเท่ากัน**

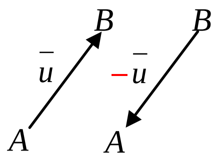


$\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกันและขนาดเท่ากัน จะสรุปได้ว่า $\bar{u} = \bar{v}$

นิเสธของเวกเตอร์ $(\bar{u}\ \&-\bar{u})$ และเวกเตอร์ศูนย์ $(\bar{0})$

นิเสธของเวกเตอร์ $(\bar{u}\ \&-\bar{u})$

คือ เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกัน และมีขนาดเท่ากัน



นิเสธของ $\bar{u}$ (หรือ $\overrightarrow{AB}$) **คือ** $-\bar{u}$ (หรือ $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$)

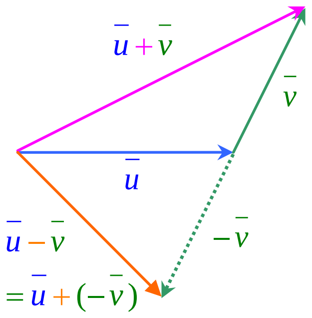
เวกเตอร์ศูนย์ $(\bar{0})$

คือ เวกเตอร์ที่มี**ขนาดเท่ากับศูนย์หน่วย** ทิศทางแล้วแต่จะกำหนด

มีลักษณะเป็นจุด •

เช่น ถ้า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จะได้ว่า $|\bar{u}|=0$

การบวก และลบเวกเตอร์ แบบ Graphic



$\bar{u}+\bar{v}$ **คือ**

การเอาจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ต่อกับ จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\bar{v}$

เวกเตอร์ผลลัพท์ คือ เวกเตอร์ที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และ จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

$\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$ **คือ**

การเอาจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ต่อกับ จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $-\bar{v}$

เวกเตอร์ผลลัพท์ คือ เวกเตอร์ที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และ จุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $-\bar{v}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ($k.\overline{u}$) แบบ Graphic

สเกลาร์ **คือ** จำนวนจริง

ให้ k เป็นสเกลาร์ และ $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

1) ถ้า $k > 0$

$k\overline{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overline{u}$ และ

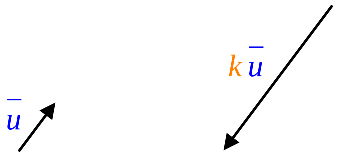
$k\overline{u}$ มีขนาดเป็น k เท่า ของ $\overline{u}$

$$\frac{|k\overline{u}|}{|\overline{u}|} = \frac{|k||\overline{u}|}{|\overline{u}|} = |k| = k$$

2) ถ้า $k = 0$

$k\overline{u} = 0\overline{u} = \overline{0}$

3) ถ้า $k < 0$

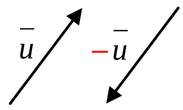


$k\overline{u}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overline{u}$ และ

$k\overline{u}$ มีขนาดเป็น $|k|$ เท่า ของ $\overline{u}$

$$\frac{|k\overline{u}|}{|\overline{u}|} = \frac{|k||\overline{u}|}{|\overline{u}|} = |k|$$

Note

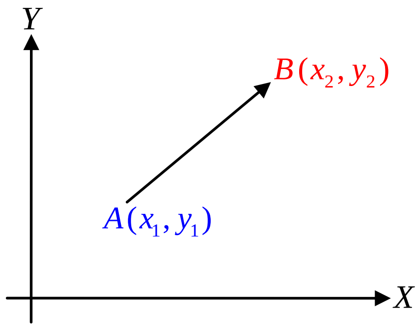


ถ้า $k = -1$

จะได้ $k\bar{u} = -1(\bar{u}) = -\bar{u}$ (ซึ่งเป็นนิเสธของ $\bar{u}$)

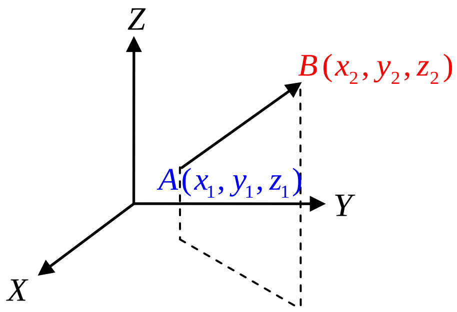
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

การเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

<table>
<tr><th>2 มิติ</th><th>3 มิติ</th></tr>
<tr>
<td>


$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$

เขียนสัญลักษณ์อีกแบบได้เป็น

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \end{bmatrix}$
</td>
<td>


$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$

เขียนสัญลักษณ์อีกแบบได้เป็น

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{bmatrix}$
</td>
</tr>
</table>

การหาขนาด ($|\bar{u}|$) และ ความชัน ($m_{\bar{u}}$) ของเวกเตอร์

<table>
<tr><th>2 มิติ</th><th>3 มิติ</th></tr>
<tr>
<td>
ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$

จะได้ว่า $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

และความชันของเวกเตอร์ $\bar{u}$

$m_{\bar{u}} = \frac{b}{a}$
</td>
<td>
ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

จะได้ว่า $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
</td>
</tr>
</table>

การเท่ากันของเวกเตอร์

2 มิติ	3 มิติ
ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}$ $\bar{v}=d\bar{i}+e\bar{j}$ และ $\bar{u}=\bar{v}$ จะได้ว่า $a=d$ $b=e$	ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ $\bar{v}=d\bar{i}+e\bar{j}+f\bar{k}$ และ $\bar{u}=\bar{v}$ จะได้ว่า $a=d$ $b=e$ $c=f$

นิเสธของเวกเตอร์ ($\bar{u}$ & $-\bar{u}$) และเวกเตอร์ศูนย์ ($\bar{0}$)

2 มิติ	3 มิติ
ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}$ **นิเสธของ** $\bar{u}$ คือ $-\bar{u}=-a\bar{i}-b\bar{j}$ **เวกเตอร์ศูนย์** ($\bar{0}$) $\bar{0}=0\bar{i}+0\bar{j}$	ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ **นิเสธของ** $\bar{u}$ คือ $-\bar{u}=-a\bar{i}-b\bar{j}-c\bar{k}$ **เวกเตอร์ศูนย์** ($\bar{0}$) $\bar{0}=0\bar{i}+0\bar{j}+0\bar{k}$

การบวก และลบเวกเตอร์

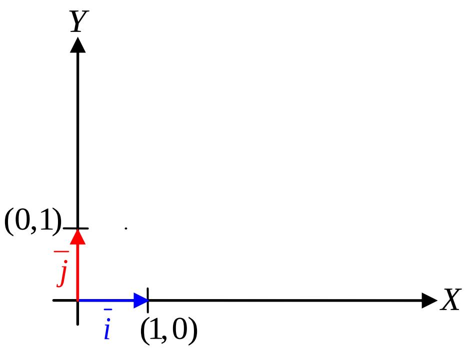
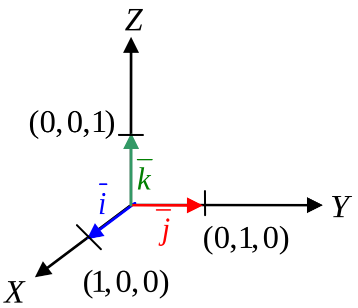
2 มิติ	3 มิติ
ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}$ $\bar{v}=d\bar{i}+e\bar{j}$ จะได้ว่า $\bar{u}+\bar{v}=(a+d)\bar{i}+(b+e)\bar{j}$ $\bar{u}-\bar{v}=(a-d)\bar{i}+(b-e)\bar{j}$	ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ $\bar{v}=d\bar{i}+e\bar{j}+f\bar{k}$ จะได้ว่า $\bar{u}+\bar{v}=(a+d)\bar{i}+(b+e)\bar{j}+(c+f)\bar{k}$ $\bar{u}-\bar{v}=(a-d)\bar{i}+(b-e)\bar{j}+(c-f)\bar{k}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ($k.\bar{u}$)

2 มิติ	3 มิติ
ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ จะได้ว่า $k\bar{u} = ka\bar{i} + kb\bar{j}$	ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ จะได้ว่า $k\bar{u} = ka\bar{i} + kb\bar{j} + kc\bar{k}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k},\ \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|})$

เวกเตอร์ 1 หน่วย **คือ** เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

2 มิติ	3 มิติ
 $\bar{i}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตามแกน X $\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตามแกน Y	 $\bar{i}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตามแกน X $\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตามแกน Y $\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตามแกน Z
ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$	ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$
จะได้ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{a\bar{i}+b\bar{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **เป็น** **เวกเตอร์ 1 หน่วย ของ** $\bar{u}$ คือมีขนาด 1 หน่วย และ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$	จะได้ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ **เป็น** **เวกเตอร์ 1 หน่วย ของ** $\bar{u}$ คือมีขนาด 1 หน่วย และ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

โคไซน์แสดงทิศทาง

ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ และ $|\bar{u}| \neq 0$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{u}$ คือ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ถ้าเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

ทิศทางเดียวกัน ค่าโคไซน์แสดงทิศทาง ต้อง**เหมือนกันทั้งชุด**

ทิศทางตรงข้ามกัน ค่าโคไซน์แสดงทิศทาง ต้องเป็น**ค่าตรงข้ามกันทั้งชุด**

ผลคูณเชิงสเกลาร์ ($\bar{u}.\bar{v}$)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ **คือ** ผลคูณของเวกเตอร์ซึ่งได้ค่าออกมาเป็นสเกลาร์

($\bar{u}.\bar{v}$ เรียกว่า ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$)

2 มิติ	3 มิติ
ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ $\bar{v} = d\bar{i} + e\bar{j}$ จะได้ว่า $\bar{u}.\bar{v} = (a.d) + (b.e)$	ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ $\bar{v} = d\bar{i} + e\bar{j} + f\bar{k}$ จะได้ว่า $\bar{u}.\bar{v} = (a.d) + (b.e) + (c.f)$

สมบัติ

1) ***** $\bar{u}.\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ ***** โดย θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

(เนื่องจากมุมระหว่างเวกเตอร์ θ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ ก็คือ มุมระหว่างเวกเตอร์จะเป็นมุมกลับไม่ได้ จึงได้ว่า $\sin\theta$ **ไม่มีทาง**เป็นค่าลบ)

2) ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ จะได้ว่า $\bar{u}.\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos 90^\circ = 0$

3) $\bar{u}.\bar{u} = |\bar{u}||\bar{u}|\cos 0^\circ = |\bar{u}||\bar{u}| = |\bar{u}|^2$

4) $\bar{u}.\bar{v} = \bar{v}.\bar{u}$

5) $\bar{u}.(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u}.\bar{v} + \bar{u}.\bar{w}$

6) $a(\bar{u}.\bar{v}) = (a\bar{u}).\bar{v} = \bar{u}.(a\bar{v})$ เมื่อ a เป็นสเกลาร์

7) $\bar{i}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{j} = \bar{k}.\bar{k} = 1$ และ $\bar{i}.\bar{j} = \bar{i}.\bar{k} = \bar{j}.\bar{k} = 0$

8) $\bar{0}.\bar{u} = 0$

9) $|\bar{u} \pm \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 \pm 2\bar{u}.\bar{v} + |\bar{v}|^2$

<u>พิสูจน์</u> $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}).(\bar{u} + \bar{v})$

$$= \bar{u}.\bar{u} + \bar{u}.\bar{v} + \bar{v}.\bar{u} + \bar{v}.\bar{v}$$

$$= |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}.\bar{v} + |\bar{v}|^2$$

<u>พิสูจน์</u> $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = (\bar{u} - \bar{v}).(\bar{u} - \bar{v})$

$$= \bar{u}.\bar{u} - \bar{u}.\bar{v} - \bar{v}.\bar{u} + \bar{v}.\bar{v}$$

$$= |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}.\bar{v} + |\bar{v}|^2$$

10) ถ้า $\bar{u}.\bar{v} = \bar{w}.\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $\bar{w}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ $(\bar{u}\times\bar{v})$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ **คือ** ผลคูณของเวกเตอร์ซึ่งได้ค่าออกมาเป็นเวกเตอร์

ให้

$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

$\bar{v} = d\bar{i} + e\bar{j} + f\bar{k}$

จะได้

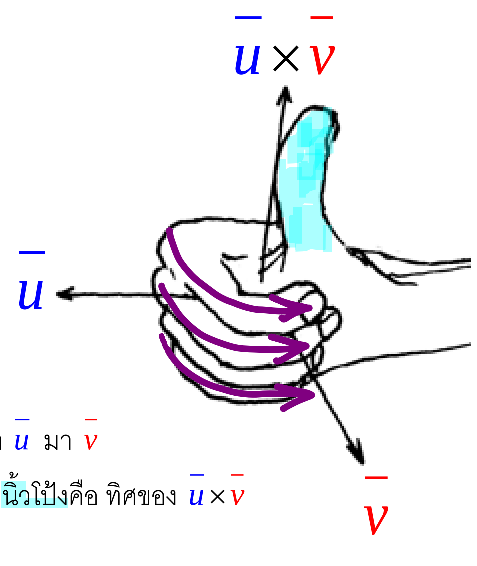
$$-(db\bar{k} + ec\bar{i} + fa\bar{j}) = -db\bar{k} - ec\bar{i} - fa\bar{j}$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} \\ a & b \\ d & e \end{matrix}$$

$$bf\bar{i} + cd\bar{j} + ae\bar{k}$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = (bf - ec)\bar{i} + (cd - fa)\bar{j} + (ae - db)\bar{k}$$

ทิศทางของผลคูณเชิงเวกเตอร์ หาได้โดยใช้ กฎมือขวา



มือขวา

นิ้วกวักจาก $\bar{u}$ มา $\bar{v}$

ทิศทางของนิ้วโป้งคือ ทิศของ $\bar{u}\times\bar{v}$

สมบัติ

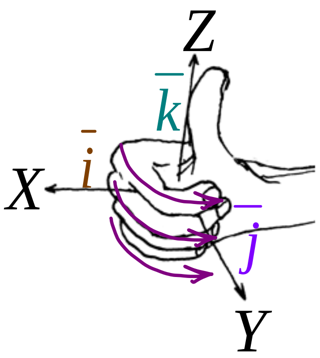
1) $\bar{u}\times\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

2) $\bar{u}\times\bar{v}$ ทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{v}\times\bar{u}$ ดังนั้น $\bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$

3) $\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})+(\bar{u}\times\bar{w})$ และ $(\bar{v}+\bar{w})\times\bar{u}=(\bar{v}\times\bar{u})+(\bar{w}\times\bar{u})$

4) $a(\bar{u}\times\bar{v})=(a\bar{u})\times\bar{v}=\bar{u}\times(a\bar{v})$ เมื่อ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}, \bar{v}$ ไม่สลับซ้ายขวากัน

5) $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$ และ $\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$



6) $\left|\bar{u}\times\bar{v}\right|=\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\sin\theta$

โดย θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ซึ่ง $0^\circ\le\theta\le 180^\circ$

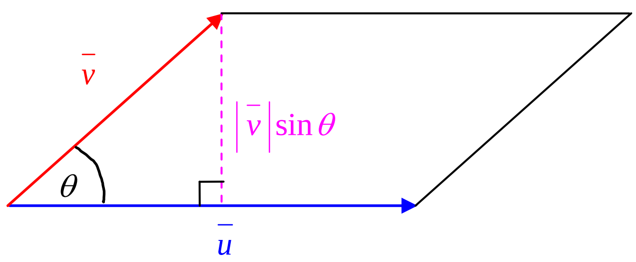
7) $\bar{u}.(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v}).\bar{w}$

8) $\bar{u}\times\bar{u}=\bar{0}$ เพราะ $\left|\bar{u}\times\bar{u}\right|=\left|\bar{u}\right|\left|\bar{u}\right|\sin 0^\circ=0$

9) ถ้า $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ **อยู่บนระนาบเดียวกัน** แล้ว $\bar{u}.(\bar{v}\times\bar{w})=0$

(เนื่องมาจาก $\bar{v}\times\bar{w}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ เวกเตอร์ตั้งฉากกันดอท . กันจะเท่ากับศูนย์)

10) การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

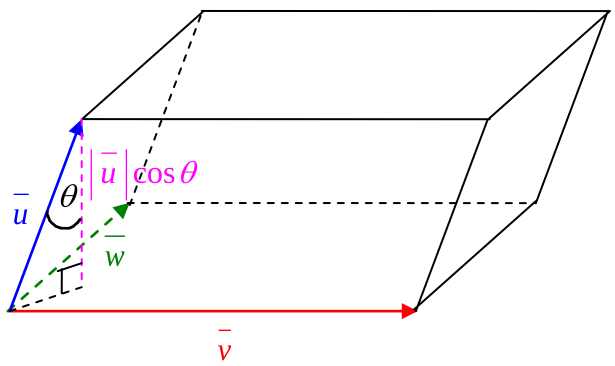


พื้นที่ $=$ (ฐาน)(สูง)

$$=\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\sin\theta$$

$$=\left|\bar{u}\times\bar{v}\right|$$

11) การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



$$\text{ปริมาตร} = (\text{พื้นที่ฐาน})(\text{สูง})$$
$$= |\bar{v}\times\bar{w}||\bar{u}|\cos\theta$$
$$= |(\bar{v}\times\bar{w}).\bar{u}|$$