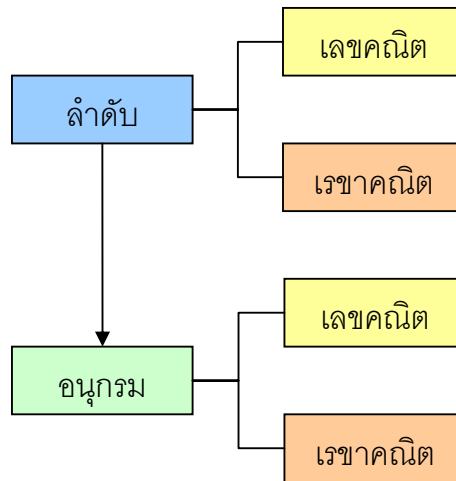


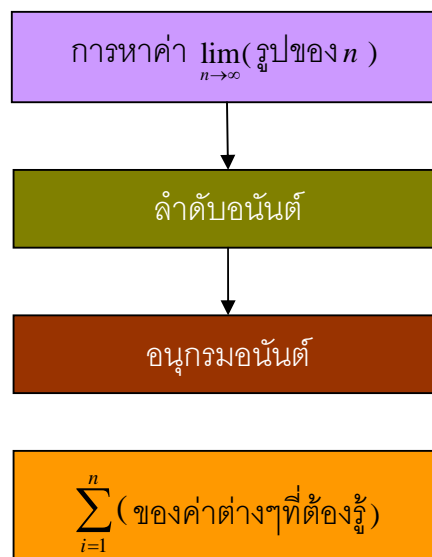
# ลำดับและอนุกรมอนันต์

ม.6 เทอมปลาย สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

## ลำดับและอนุกรม



## ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์



## ลำดับและอนุกรม

### ลำดับ

#### เลขคณิต

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$$

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

(ผลต่างร่วม  $d$  คงที่)

จะได้ว่า

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

#### เรขาคณิต

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

(อัตราส่วนร่วม  $r$  คงที่)

จะได้ว่า

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

**อนุกรม****เลขคณิต**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

(ผลต่างร่วม  $d$  คงที่)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

จะได้ว่า

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{โดยที่ } a_n = a_1 + (n-1)d$$

**เรขาคณิต**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

(อัตราส่วนร่วม  $r$  คงที่)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

จะได้ว่า

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{โดยที่ } r \neq 1$$

## ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

### การหาค่า $\lim$ (รูปของ $n$ )

ให้  $c$  เป็นค่าคงตัว,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

จะได้ว่า

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$  (ลิมิตเจอค่าคงตัวได้ค่าคงตัว)
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot A$
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$
- 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$  โดยที่  $b_n \neq 0$  ทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  และ  $B \neq 0$
- 6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^c = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^c = A^c$

### Note

ให้  $M$  เป็นเลขชี้กำลังสูงสุดของเศษ

$N$  เป็นเลขชี้กำลังสูงสุดของส่วน

$$\text{เมื่อ } M = N \text{ จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^M + \dots + c}{bn^N + \dots + d} = \frac{a}{b}$$

$$\text{เมื่อ } M > N \text{ จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^M + \dots + c}{bn^N + \dots + d} = \infty$$

$$\text{เมื่อ } M < N \text{ จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^M + \dots + c}{bn^N + \dots + d} = 0$$

**ลำดับอนันต์****ลำดับลู่เข้า (Convergent)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a_\infty = \text{หาค่าได้}$$

เช่น ลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม  $d = 0$

ลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม  $r = 1$  หรือ  $|r| < 1$

ลำดับอะไรก็ตาม ที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \text{หาค่าได้}$

**ลำดับลู่ออก (Divergent)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a_\infty = \text{หาค่าไม่ได้}$$

เช่น ลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม  $d \neq 0$

ลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม  $r = -1$  หรือ  $|r| > 1$

ลำดับอะไรก็ตาม ที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \text{หาค่าไม่ได้}$

**อนุกรมอนันต์****อนุกรมลู่เข้า (Convergent)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_\infty = \text{หาค่าได้}$$

เช่น อนุกรมเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วม  $d = 0$  และ  $a_1 = 0$  (อนุกรมค่าคงตัว 0)

อนุกรมเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม  $|r| < 1$

$$\text{**** จะได้ว่า } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} \text{ ****}$$

อนุกรมอะไรก็ตาม ที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \text{หาค่าได้}$

**อนุกรมลู่ออก (Divergent)**

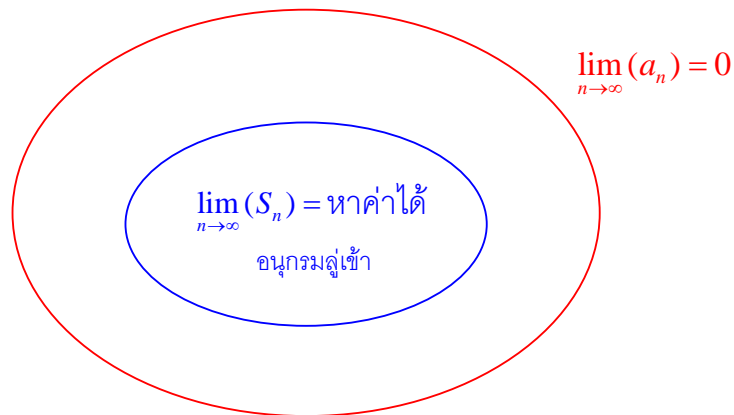
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_\infty = \text{หาค่าไม่ได้}$$

เช่น อนุกรมเลขคณิต ทั้งหมด ยกเว้นอนุกรมค่าคงตัว 0

อนุกรมเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม  $|r| \geq 1$

อนุกรมอะไรก็ตาม ที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \text{หาค่าไม่ได้}$

## Note



- 1) ถ้าอนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมลู่เข้า จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$
- 2) ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$  จะได้ว่า อนุกรมอนันต์อาจเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้
- 3) ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \neq 0$  จะได้ว่า อนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมลู่ออก

$\sum_{i=1}^n$  (ของค่าต่างๆที่ต้องรู้)

$$1) \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$