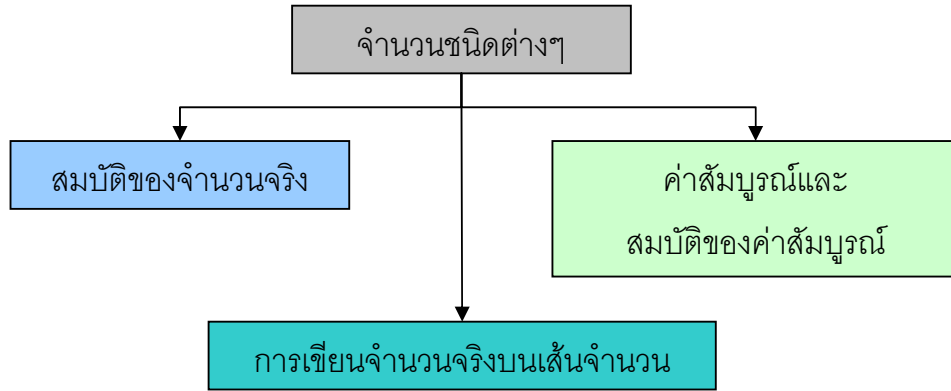


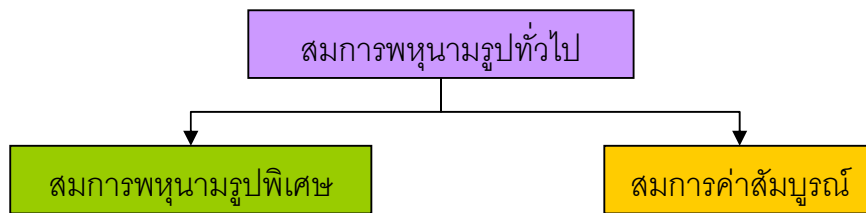
# จำนวนจริง ม.4 เทอมต้น สารการเรียนรู้เพิ่มเติม

## พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง

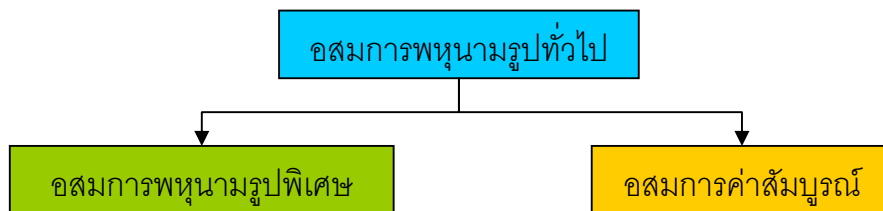


## การแก้สมการ และอสมการ

### การแก้สมการ



### การแก้อสมการ

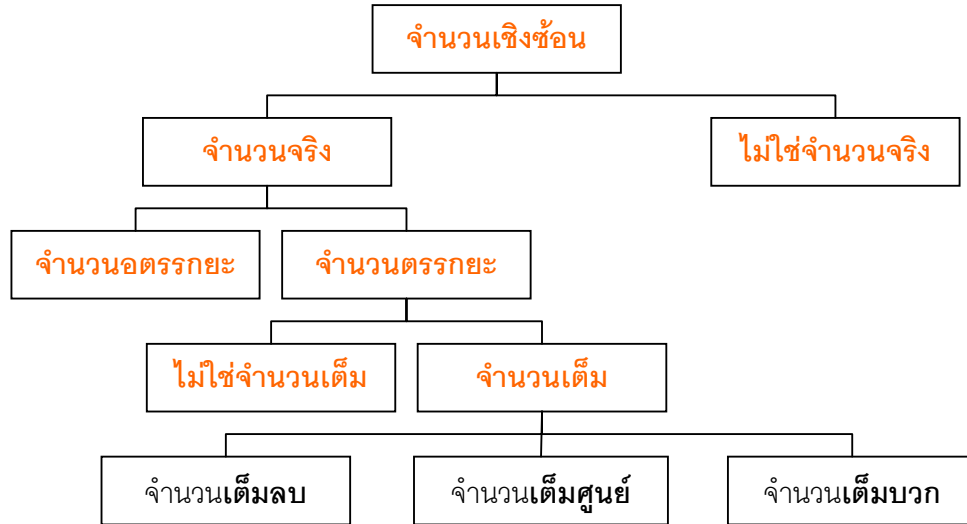


## ทฤษฎีเศษเหลือ



## พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง

### จำนวนชนิดต่างๆ



#### จำนวนเชิงซ้อน

คือ จำนวนทุกจำนวน

#### จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นจำนวนจริง

คือ จำนวนที่ไม่มีค่าลบที่อยู่ในรากคู่เป็นส่วนประกอบ

เช่น  $6, 8, -7.5, \frac{3}{5}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt[4]{16}, -\sqrt[6]{18}$

#### จำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง

คือ จำนวนที่มีส่วนประกอบของค่าลบที่อยู่ในรากคู่ เช่น  $\sqrt{-1}, \sqrt[4]{-2}, \sqrt[6]{-4}, \frac{1}{\sqrt{-4}}, 1 + \sqrt{-1}$

#### จำนวนอตรรกยะ

คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปของทศนิยมซ้ำได้

และไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่เศษเป็นจำนวนเต็ม และส่วนเป็นจำนวนเต็มได้

เช่น  $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$

$$\pi = 3.141592\dots$$

**จำนวนตรรกยะ** (จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ)

คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปของทศนิยมซ้ำได้

และ สามารถเขียนในรูปเศษส่วน ที่เศษเป็นจำนวนเต็ม และส่วนเป็นจำนวนเต็มได้  
(ส่วนไม่เท่ากับ 0)

เช่น  $-1.5$  หรือมันก็คือ  $-1.50\dots$  จะเขียนในรูปทศนิยมซ้ำได้เป็น  $-1.5\dot{0}$

$$0, 5, -4$$

$$3.\dot{3}, 5.\dot{6}2\dot{3}$$

$$\frac{22}{7}, -\frac{7}{9}$$

**จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม**

เช่น  $-1.5, 3.\dot{3}, 5.\dot{6}2\dot{3}, \frac{22}{7}, -\frac{7}{9}$

**จำนวนเต็ม**

จำนวนเต็มบวก (จำนวนนับ) เช่น  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$\frac{7}{7}, \frac{14}{7}$$

จำนวนเต็มศูนย์ เช่น  $0, \frac{0}{5}$

จำนวนเต็มลบ เช่น  $-1, -2, -3, -4, \dots$

$$-\frac{7}{7}, -\frac{14}{7}$$

## สมบัติของจำนวนจริง

ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $R$  คือ เซตของจำนวนจริง

### สมบัติการเท่ากัน

สมบัติการสะท้อน	จะได้ $a = a$
สมบัติการสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
สมบัติการถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ทั้งสองข้าง	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ทั้งสองข้าง	ถ้า $a = b$ แล้ว $a \cdot c = b \cdot c$

### สมบัติการบวก

สมบัติปิด	ถ้า $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $a + b \in R$
สมบัติการสลับที่	จะได้ $a + b = b + a$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	จะได้ $a + (b + c) = (a + b) + c$
สมบัติมีเอกลักษณ์การบวก คือ 0	จะได้ $0 + a = a + 0 = a$
สมบัติมีอินเวอร์สการบวก	$a$ มีอินเวอร์สการบวกคือ $-a$ และ $-a$ มีอินเวอร์สการบวกคือ $a$ จะได้ $a + (-a) = (-a) + a = 0$

### สมบัติการคูณ

สมบัติปิด	ถ้า $a \in R$ และ $b \in R$ แล้ว $a \cdot b \in R$
สมบัติการสลับที่	จะได้ $a \cdot b = b \cdot a$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	จะได้ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
สมบัติมีเอกลักษณ์การคูณ คือ 1	จะได้ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
สมบัติมีอินเวอร์สการคูณ (ยกเว้น 0 เพราะ $\frac{1}{0}$ ไม่มีความหมาย)	$a$ มีอินเวอร์สการคูณคือ $\frac{1}{a}$ และ $\frac{1}{a}$ มีอินเวอร์สการคูณคือ $a$ จะได้ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

### สมบัติการคูณและการบวก

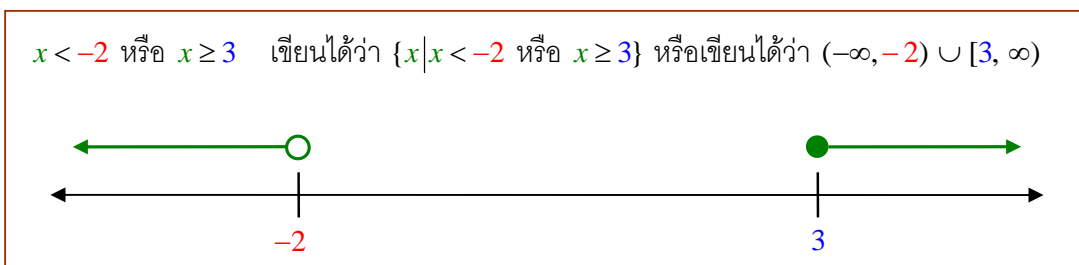
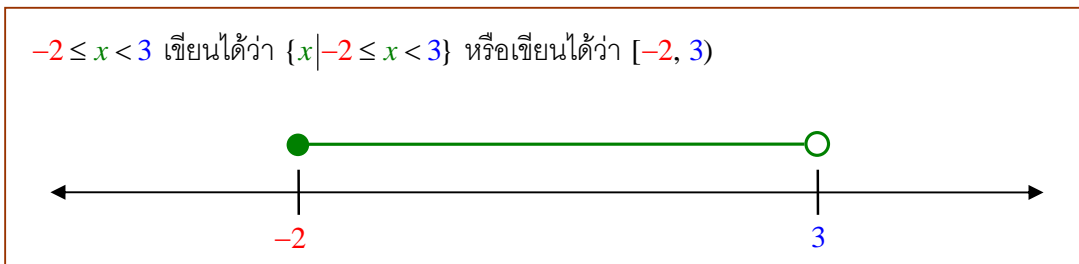
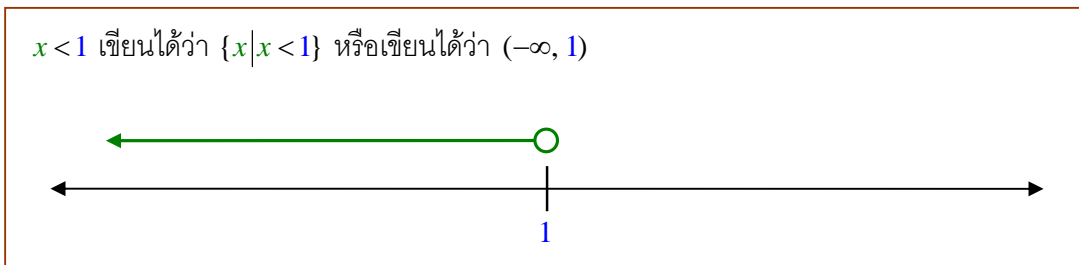
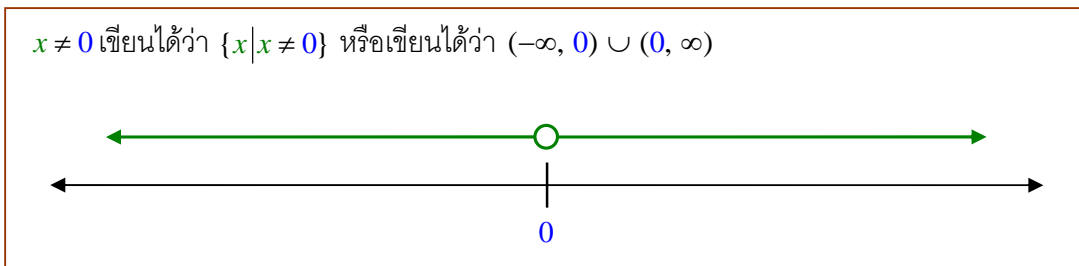
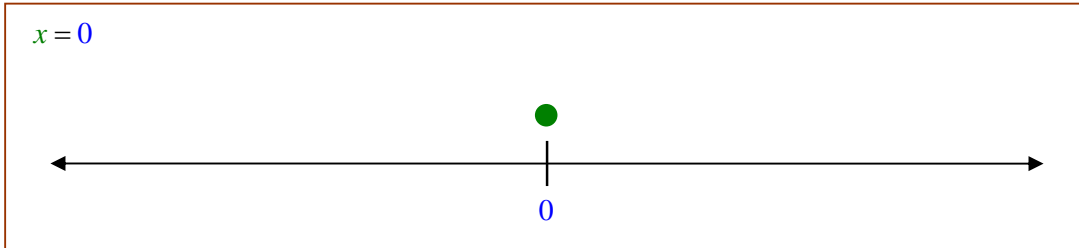
สมบัติการแจกแจง	จะได้ $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
-----------------	--

### การเขียนจำนวนจริงบนเส้นจำนวน

เครื่องหมาย  $=, \geq, \leq$  และ วงเล็บ  $[, ]$  จุดทึบ  $\bullet$

เครื่องหมาย  $\neq, >, <$  และ วงเล็บ  $(, )$  จุดโปร่ง  $\circ$

ตัวอย่างเขียน  $x$  บนเส้นจำนวน ดังนี้



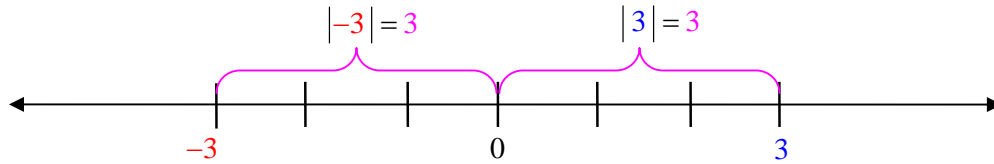
## ค่าสัมบูรณ์และสมบัติของค่าสัมบูรณ์

### ค่าสัมบูรณ์

ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

ค่าสัมบูรณ์ของ  $a$  หรือ  $|a|$  คือ ระยะทางจากจุด  $a$  ถึง  $0$  ซึ่งระยะทางจะมีค่าบวกเสมอ

เช่น  $|3|$  หรือ  $|-3|$  จะมีค่าเท่ากันคือ  $3$



$$\begin{array}{l} \text{ดังนั้น } |-7| = 7 \quad \left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} \\ \quad \quad |7| = 7 \quad \quad \left| \frac{7}{6} \right| = \frac{7}{6} \end{array}$$

\*วิธีถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ทำได้ดังนี้

ถ้า  $a < 0$  แล้ว  $|a| = -a$  (ลบอยู่หน้าลบ ได้ค่าบวก)

ถ้า  $a > 0$  แล้ว  $|a| = a$

ถ้า  $a = 0$  แล้ว  $|a| = 0$

## สมบัติของค่าสัมบูรณ์

ให้  $x, y$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $a$  เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0

1)  $|x| \geq 0$

2)  $|x| = |-x|$

3)\*  $|x| = a$  เมื่อ  $x = a$  หรือ  $x = -a$

4)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$  โดยที่  $y \neq 0$

6)\*  $|x| = \sqrt{x^2} \neq (\sqrt{x})^2$

7)  $|x|^2 = x^2$

8)\*  $|x| < a$  จะได้ว่า  $-a < x < a$

$|x| \leq a$  จะได้ว่า  $-a \leq x \leq a$

$|x| > a$  จะได้ว่า  $x < -a$  หรือ  $a < x$

$|x| \geq a$  จะได้ว่า  $x \leq -a$  หรือ  $a \leq x$

9)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

10)  $|x - y| \geq |x| - |y|$

ตรงส่วนที่มีเครื่องหมาย \*

เป็นความรู้พื้นฐานสำคัญที่ต้องนำมาใช้

แก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

## การแก้สมการ และอสมการ

### การแก้สมการ

#### การแก้สมการพหุนามรูปทั่วไป

เช่น  $2x^4 - 14x^2 = -12x$

#### ขั้นที่ 1

ย้ายข้างให้ข้างหนึ่งของสมการมีค่าเป็น 0

และอีกข้าง ให้ ส.ป.ส. หน้าตัวแปรยกกำลังสูงสุดมีค่าเป็นบวก

จะได้  $2x^4 - 14x^2 + 12x = 0$

#### ขั้นที่ 2

ถ้าพหุนามมีตัวร่วมดึงออกมาเลย และถ้าเป็นค่าคงตัวหารตลอดได้สมการเลย

(แต่ตัวแปรห้ามหารตลอดสมการ เพราะตัวแปรมีค่าเป็น 0 ได้ ซึ่งตัวส่วนเป็น 0 หาค่าไม่ได้นะ)

ซึ่งจะเห็นว่า  $2x^4 - 14x^2 + 12x$  มี  $2x$  เป็นตัวร่วม ดึงออกมาเลย

จะได้  $2x(x^3 - 7x + 6) = 0$  นำ 2 หารตลอดสมการ แต่ห้ามนำ  $x$  หารตลอดสมการ

จะได้  $x(x^3 - 7x + 6) = 0$

#### ขั้นที่ 3

แยกแฟกเตอร์ (หลังจากแยกแฟกเตอร์แล้ว ส.ป.ส. หน้า ตัวแปรต้องมีค่าบวก)

แยกแฟกเตอร์  $x^3 - 7x + 6$  ทำโดยขั้นตอนดังนี้

3.1) หาค่าที่แทนใน  $x$  แล้วทำให้  $x^3 - 7x + 6$  มีค่าเป็น 0

ควรลองค่าๆ แทนดูก่อน เช่น 1, -1, 2, -2, ... ลองเอา 1 แทนดูก่อน

จะได้  $1^3 - 7(1) + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$

ดังนั้น จะได้ว่า  $(x-1)$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $x^3 - 7x + 6$

เขียนได้ว่า  $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(\quad)$

3.2) หาตัวประกอบที่เหลือโดยการหารยาว

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x-1 \overline{) x^3 - 7x + 6} \end{array}$$

$$x^3 - x^2$$

$$x^2 - 7x + 6$$

$$x^2 - x$$

$$-6x + 6$$

$$-6x + 6$$

$$0$$



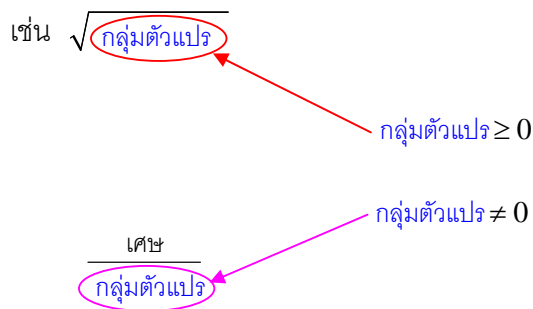
3.3) ดังนั้นจากขั้นตอนที่ 2  $x(x^3 - 7x + 6) = 0$   
 $x(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$   
 $x(x-1)(x+3)(x-2) = 0$   
 คำตอบของสมการคือ 0, 1, -3, 2

### การแก้สมการพหุนามรูปพิเศษ

พหุนามรูปพิเศษ หมายถึง  $\sqrt{\text{กลุ่มตัวแปร}}$  หรือ  $\frac{\text{เศษ}}{\text{กลุ่มตัวแปร}}$

#### หลักการที่สำคัญมากๆ

ก่อนจะตะลุยแก้สมการให้เขียนเงื่อนไขข้างต้นของกลุ่มตัวแปรซะก่อน



หลังจากเขียนเงื่อนไขข้างต้นแล้ว

ทำให้พหุนามรูปพิเศษ ให้เป็นพหุนามรูปทั่วไป แล้วแก้สมการตามขั้นตอนของการแก้สมการ

พหุนามรูปทั่วไปจนได้คำตอบ

**สำคัญมาก** ก่อนจะสรุปคำตอบ ต้องนำคำตอบที่ได้ Check ว่าเป็นตามเงื่อนไขข้างต้นหรือไม่ เอาแต่เฉพาะคำตอบที่เป็นตามเงื่อนไขข้างต้น เท่านั้น

**การแก้สมการค่าสัมบูรณ์**ให้  $|x| = a$  ถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ทำได้ 2 วิธี

<p><b>วิธีที่ 1 ยกกำลังสองทั้งสองข้าง</b></p> $ x  = a$ <p>จาก <math> x  = \sqrt{x^2}</math></p> <p>จะได้ <math>\sqrt{x^2} = a</math> ยกกำลังสองทั้งสองข้าง</p> <p>จะได้ <math>x^2 = a^2</math></p> $x^2 - a^2 = 0$ $(x - a)(x + a) = 0$ $x = a, -a$ <p>***วิธีนี้ไม่เหมาะ ถ้าในสมการ ตัวแปรยกกำลังมากกว่าหนึ่ง</p>	<p><b>วิธีที่ 2 แยกกรณี</b></p> $ x $ <p>กรณีที่ <math>x \geq 0</math>      หรือ      กรณีที่ <math>x &lt; 0</math></p> <p>จะได้ <math> x  = x</math>                                      จะได้ <math> x  = -x</math></p>
---	--

## การแก้อสมการ (ข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัยชอบออกมาก!!!)

\*\*\*พื้นฐานสำคัญที่ต้องรู้เกี่ยวกับอสมการ\*\*\*

ถ้านำค่าลบมาคูณหรือหารทั้งสองข้างของอสมการ เครื่องหมายอสมการต้องกลับข้าง  
เช่น

ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $a < b$  และ  $c$  เป็นค่าลบ

จะได้  $a \cdot c > b \cdot c$

ถ้า  $a \leq b$  และ  $c$  เป็นค่าลบ

จะได้  $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

การยกกำลังสองทั้งสองข้างของอสมการ

ให้  $a < b$

จะได้  $a^2 < b^2$  ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นค่าบวกทั้งคู่ ( $a$  เป็น 0 ก็ได้)

จะได้  $a^2 > b^2$  ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นค่าลบทั้งคู่ ( $b$  เป็น 0 ก็ได้)

\*\*\*แต่ถ้า  $a$  เป็นลบ และ  $b$  เป็นบวก จะบอกไม่ได้ว่า  $a^2 < b^2$  หรือ  $a^2 > b^2$

## การแก้อสมการพหุนามรูปทั่วไป

ทำขั้นตอนเหมือนแก้อสมการพหุนามรูปทั่วไปจนแยกแฟกเตอร์เสร็จ

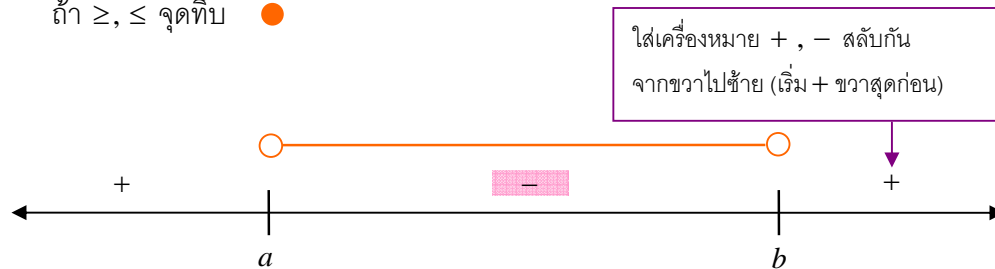
(ส.ป.ส. หน้าตัวแปรต้องเป็นบวกทั้งหมด)

เช่น  $(x-a)(x-b) < 0$

นำค่าที่ทำให้พหุนามเป็น 0 มาเขียนบนเส้นจำนวน ก็คือ ค่า  $a, b$

ใส่จุด ถ้า  $>, <$  จุดโปร่ง  $\circ$

ถ้า  $\geq, \leq$  จุดทึบ  $\bullet$



ถ้า พหุนาม  $<, \leq$  เอาช่วง  $-$

ถ้า พหุนาม  $>, \geq$  เอาช่วง  $+$

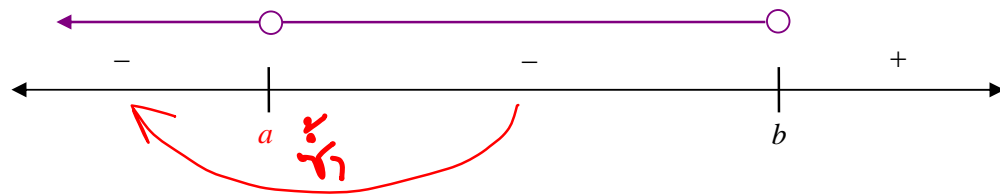
**Note** ถ้าแยกแฟกเตอร์แล้วมีบางวงเล็บ

ยกกำลังเลขคู่  $(x-a)^{2,4,6,\dots}$  ให้ใส่เครื่องหมายซ้ำเดิมจากขวาไปซ้าย ที่จุด  $a$  นั้น

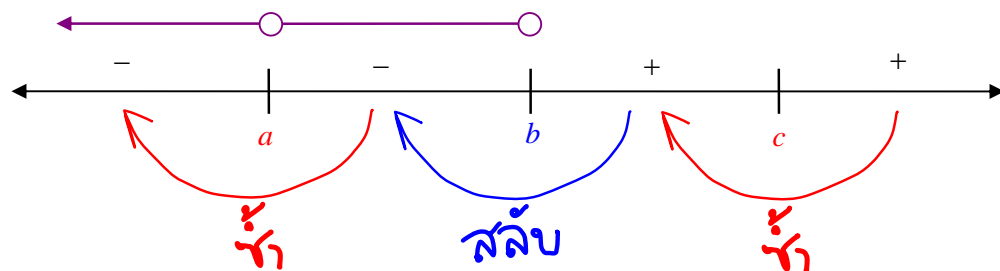
แต่ถ้ายกกำลังเลขคี่  $(x-a)^{3,5,7,\dots}$  ให้คิดเหมือน  $(x-a)$  ได้เลย

เช่น

$$(x-a)^2(x-b) < 0$$



$$(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^4 < 0$$

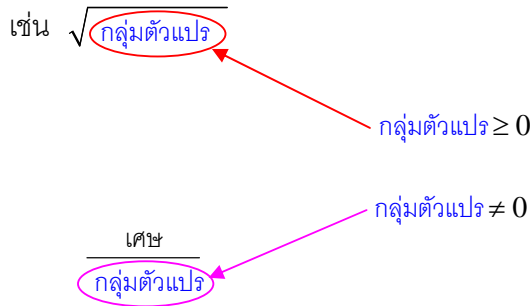


## การแก้สมการพหุนามรูปพิเศษ

พหุนามรูปพิเศษ หมายถึง  $\sqrt{\text{กลุ่มตัวแปร}}$  หรือ  $\frac{\text{เศษ}}{\text{กลุ่มตัวแปร}}$

### หลักการที่สำคัญมาก ๆ

ก่อนจะตะลุยแก้สมการให้เขียนเงื่อนไขข้างต้นของกลุ่มตัวแปรซะก่อน



หลังจากเขียนเงื่อนไขข้างต้นแล้ว

ทำให้พหุนามรูปพิเศษ ให้เป็นพหุนามรูปทั่วไป แล้วแก้สมการตามขั้นตอนของการแก้สมการพหุนามรูปทั่วไปจนได้คำตอบ

**สำคัญมาก** ก่อนจะสรุปคำตอบ ต้องนำคำตอบที่ได้ Check ว่าเป็นตามเงื่อนไขข้างต้นหรือไม่ เอาแต่เฉพาะคำตอบที่เป็นตามเงื่อนไขข้างต้น เท่านั้น

\*\*\*หลักในการแก้สมการพหุนามที่กลุ่มตัวแปรอยู่ที่ส่วน

เช่น

$$\frac{1}{x-5} \leq 1$$

เงื่อนไขข้างต้นคือ  $x-5 \neq 0$  ดังนั้น  $x \neq 5$

นำ  $(x-5)^2$  มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

\*\*\*สาเหตุที่ต้องเป็น  $(x-5)^2$  ไม่เป็น  $(x-5)$  เพราะ

$(x-5)$  เราไม่รู้ว่าเป็นค่าบวกหรือลบ ดังนั้นเครื่องหมายสมการจึงไม่รู้ว่าจะต้องกลับข้างหรือไม่

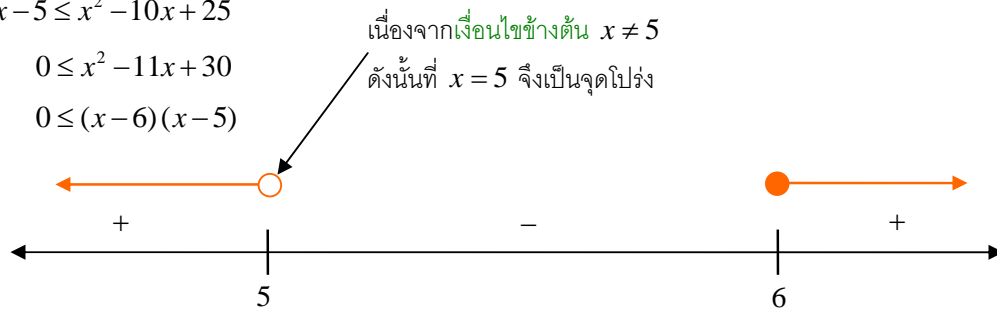
$(x-5)^2$  เรามั่นใจได้เลยว่าเป็นบวก ดังนั้นเครื่องหมายสมการเหมือนเดิม

$$\text{จะได้ } x-5 \leq (x-5)^2$$

$$x-5 \leq x^2 - 10x + 25$$

$$0 \leq x^2 - 11x + 30$$

$$0 \leq (x-6)(x-5)$$



$$\text{จึงได้ } x = (-\infty, 5) \cup [6, \infty)$$

## การแก้สมการค่าสัมบูรณ์

ถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ทำได้ 3 วิธี

### วิธีที่ 1 ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

เปลี่ยนจาก  $|x|$  ไปเป็น  $\sqrt{x^2}$  แล้วยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการเพื่อให้  $\sqrt{\quad}$  หายไป

\*\*\*วิธีนี้ต้องใช้กับสมการที่มั่นใจว่า ซ้าย-ขวา เป็นบวกทั้งคู่ หรือ ซ้าย-ขวา เป็นลบทั้งคู่

ยกกำลังสองทั้งสองข้างแล้วจะรู้ว่าเครื่องหมายสมการต้องเป็นยังไง

\*\*\*วิธีนี้ไม่เหมาะ ถ้าในสมการ ตัวแปรยกกำลัง มากกว่าหนึ่ง

### วิธีที่ 2 ทำแบบแบ่งช่วง

$ x  < a$ จะได้ว่า $-a < x < a$ เขียนใหม่ได้เป็น $-a < x$ และ $x < a$ $-a < x \cap x < a$	$ x  > a$ จะได้ว่า $x < -a$ หรือ $a < x$ $x < -a \cup a < x$
---	--

$ x  \leq a$ จะได้ว่า $-a \leq x \leq a$ เขียนใหม่ได้เป็น $-a \leq x$ และ $x \leq a$ $-a \leq x \cap x \leq a$	$ x  \geq a$ จะได้ว่า $x \leq -a$ หรือ $a \leq x$ $x \leq -a \cup a \leq x$
--	---

สำคัญมาก “และ” คือ  $\cap$  “หรือ” คือ  $\cup$

### วิธีที่ 3 แยกกรณี

กรณีที่  $x \geq 0$  หรือ กรณีที่  $x < 0$

จะได้  $|x| = x$  จะได้  $|x| = -x$

## ทฤษฎีเศษเหลือ

$f(x)$  หารด้วย  $(x-c)$  เศษเหลือ เท่ากับ  $f(c)$

และถ้า

$f(x)$  หารด้วย  $(x-c)$  เศษเหลือ เท่ากับ 0

$f(c)=0$  แสดงว่า  $(x-c)$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $f(x)$  หรือ

$(x-c)$  หาร  $f(x)$  ลงตัว

เช่น

$f(x) = x^2 - x + 1$  หารด้วย  $x-2$  จะเหลือเศษเท่าไร?

จะเหลือเศษเท่ากับ  $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$