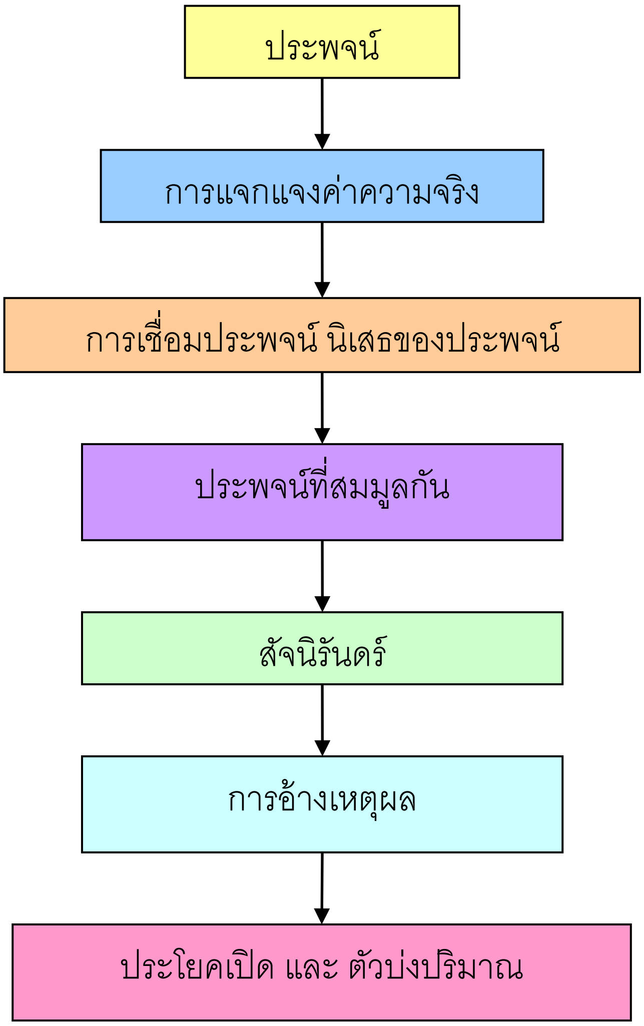
ตรรกศาสตร์ ม.4 เทอมต้น สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม



ประพจน์

ประพจน์ **คือ** ประโยคที่มีค่าความจริง เป็นจริงหรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ข้อสังเกต

ประโยคที่เป็นประพจน์ จะมีลักษณะเป็น ประโยคบอกเล่า หรือ ปฏิเสธ

ประโยคที่**ไม่**เป็นประพจน์ จะมีลักษณะเป็น ประโยคคำถาม, คำสั่ง, ขอร้อง, อุทาน

การแจกแจงค่าความจริง

จริง ใช้สัญลักษณ์ T

เท็จ ใช้สัญลักษณ์ F

มี 2 ประพจน์แจกแจงค่าความจริงได้ดังนี้

p	q
T	F
F	T
T	T
F	F

แจกแจงค่าความจริงได้ 4 แบบ

มี 3 ประพจน์แจกแจงค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	r
T	F	T
F	T	T
T	T	T
F	F	T
T	F	F
F	T	F
T	T	F
F	F	F

แจกแจงค่าความจริงได้ 8 แบบ

จำนวนวิธีการแจกแจง $=2^n$ โดยที่ n คือจำนวนประพจน์

เช่น ถ้ามี 4 ประพจน์ จะเขียนแจกแจงค่าความจริงได้ $2^4=16$ แบบ

หรือ ถ้ามี 5 ประพจน์ จะเขียนแจกแจงค่าความจริงได้ $2^5=32$ แบบ

การเชื่อมประพจน์ และ นิเสธของประพจน์

การเชื่อมประพจน์

และ ($\wedge$)

p	q	$p \wedge q$
T	F	F
F	T	F
T	T	T
F	F	F

ข้อสังเกต

เชื่อมกันด้วย <u>และ</u> ($\wedge$)

เป็นจริงได้ กรณีเดียว คือ เป็นจริงทั้งคู่

(มีเท็จอยู่ เป็นเท็จเลย)

หรือ ($\vee$)

p	q	$p \vee q$
T	F	T
F	T	T
T	T	T
F	F	F

ข้อสังเกต

เชื่อมกันด้วย <u>หรือ</u> ($\vee$)

เป็นเท็จได้ กรณีเดียว คือ เป็นเท็จทั้งคู่

(มีจริงอยู่ เป็นจริงเลย)

ถ้า...แล้ว ($\rightarrow$)

p	q	$p \rightarrow q$
T	F	F
F	T	T
T	T	T
F	F	T

ข้อสังเกต

เชื่อมกันด้วย <u>ถ้า...แล้ว</u> ($\rightarrow$)

เป็นเท็จได้ กรณีเดียว คือ

ข้างหน้าเป็นจริง ข้างหลังเป็นเท็จ

ก็ต่อเมื่อ ($\leftrightarrow$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	F	F
F	T	F
T	T	T
F	F	T

ข้อสังเกต

เชื่อมกันด้วย <u>ก็ต่อเมื่อ</u> ($\leftrightarrow$)

เป็นจริงได้ เมื่อ ทั้งคู่มีค่าความจริงเหมือนกัน

นิเสธ ($\sim$)

p	$\sim p$
T	F
F	T

ข้อสังเกต $\sim(\sim p) \equiv p$

***สมบัติการสลับที่ และสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\left.\begin{array}{l} p\wedge q\equiv q\wedge p \\ p\vee q\equiv q\vee p \\ p\leftrightarrow q\equiv q\leftrightarrow p \end{array}\right\}$$ มีสมบัติการสลับที่

$p\rightarrow q\not\equiv q\rightarrow p$ ไม่มีสมบัติการสลับที่

$$\left.\begin{array}{l} (p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)\equiv p\wedge q\wedge r \\ (p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)\equiv p\vee q\vee r \\ (p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r\equiv p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)\equiv p\leftrightarrow q\leftrightarrow r \end{array}\right\}$$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$(p\rightarrow q)\rightarrow r\not\equiv p\rightarrow(q\rightarrow r)$ ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ข้อควรระวังในการหาค่าความจริงของประพจน์

ถ้ามีวงเล็บให้หาค่าความจริงภายในวงเล็บก่อน

แต่ถ้าไม่มีวงเล็บให้หาค่าความจริง $\sim$ ก่อน แล้วจึง $\wedge$, $\vee$ แล้วจึง $\rightarrow$ แล้วจึง $\leftrightarrow$ ตามลำดับ

ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน **คือ** ประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกัน**ทุก**กรณี

***ประพจน์ที่สมมูลกันที่ต้องจำ

1) น $\rightarrow$ ล $\equiv$ $\sim$น $\vee$ ล , น $\vee$ ล $\equiv$ $\sim$น $\rightarrow$ ล

2) $\sim$(น $\rightarrow$ ล) $\equiv$ น $\wedge$ $\sim$ล , $\sim$(น $\wedge$ ล) $\equiv$ น $\rightarrow$ $\sim$ล

3) น $\rightarrow$ ล $\equiv$ $\sim$ล $\rightarrow$ $\sim$น

4) $\sim$(น $\vee$ ล) $\equiv$ $\sim$น $\wedge$ $\sim$ล , $\sim$(น $\wedge$ ล) $\equiv$ $\sim$น $\vee$ $\sim$ล

5) น $\leftrightarrow$ ล $\equiv$ (น $\rightarrow$ ล) $\wedge$ (ล $\rightarrow$ น)

6) น $\wedge$ (ก $\vee$ ล) $\equiv$ (น $\wedge$ ก) $\vee$ (น $\wedge$ ล) , น $\vee$ (ก $\wedge$ ล) $\equiv$ (น $\vee$ ก) $\wedge$ (น $\vee$ ล)

สัจนิรันดร์

ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ **คือ** ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง**ทุก**กรณี

การพิสูจน์สัจนิรันดร์

ขั้นแรก

สมมุติให้ประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์สัจนิรันดร์ เป็น**เท็จ**

ขั้นต่อมา

หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย

สรุป

ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อย**ขัดแย้งกัน** สรุป **เป็นสัจนิรันดร์**

ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อย**ไม่ขัดแย้งกัน** สรุป **ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

ถ้า**สรุปหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยไม่ได้** สรุป **ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

***หมายเหตุ**

สำหรับประพจน์ที่เป็นเท็จได้หลายกรณี เช่น ประพจน์ที่เชื่อมด้วย $\leftrightarrow$

ก่อน**จะสรุปว่าเป็นสัจนิรัดร์ ต้องพิสูจน์ ให้ครบทุกกรณีก่อนว่าประพจน์ย่อยขัดแย้งกัน**

แต่ถ้าพบกรณีใด**ไม่**ขัดแย้งกัน(คล้อยตาม)สามารถสรุปได้เลยว่า**ไม่**เป็นสัจนิรันดร์

สำหรับตัวเชื่อม $\leftrightarrow$ จะดูแบบนี้ก็ได้

ถ้าประพจน์ทางด้านซ้าย กับ ทางด้านขวา ของเครื่องหมาย $\leftrightarrow$

สมมูลกัน จะสรุปได้ว่า **เป็นสัจนิรันดร์**

แต่ถ้า

ไม่สมมูลกัน จะสรุปได้ว่า **ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

การอ้างเหตุผล

(เหตุที่1 $\wedge$ เหตุที่2 $\wedge$ ... $\wedge$ เหตุที่ n) $\rightarrow$ ผล

พิสูจน์สัจนิรันดร์

ขั้นแรก

สมมุติให้ประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์สัจนิรันดร์ เป็น**เท็จ**

ขั้นต่อมา

หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย

สรุป

ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อย**ขัดแย้งกัน** สรุป **เป็นสัจนิรันดร์**

ถ้าค่าความจริงของประพจน์ย่อย**ไม่ขัดแย้งกัน** สรุป **ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

ถ้า**สรุปหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยไม่ได้** สรุป **ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

ถ้าประพจน์นี้**เป็นสัจนิรันดร์**
การอ้างเหตุผลนี้จะ**สมเหตุสมผล**

ถ้าประพจน์นี้**ไม่เป็นสัจนิรันดร์**
การอ้างเหตุผลนี้จะ**ไม่สมเหตุสมผล**

***ดังนั้นการพิสูจน์ว่า การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่
จะต้องพิสูจน์ว่าประพจน์นี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ประโยคเปิด และ ตัวบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด

ประโยคเปิด **คือ** ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปร โดยเมื่อแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ ประโยคเปิดจะกลายเป็นประพจน์

สัญลักษณ์ ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร ใช้สัญลักษณ์ $P(x), Q(x), \ldots$

***ประโยคเปิดใช้ตัวเชื่อมต่างๆ $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ และ นิเสธ $(\sim)$ ได้เหมือนกับที่ใช้กับประพจน์

ตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

กำหนดให้ U คือ เอกภพสัมพัทธ์

$\forall x[P(x)]$ หมายถึง สมาชิก**ทุกตัว (แต่ละตัว)** ในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าใน x ของประโยคเปิด $P(x)$

$\exists x[P(x)]$ หมายถึง สมาชิก**อย่างน้อย 1 ตัว** ในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าใน x ของประโยคเปิด $P(x)$

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง**

เมื่อ สมาชิกทุกตัว(แต่ละตัว)ในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าใน $P(x)$ แล้วเป็นจริง

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

เมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าใน $P(x)$ แล้วเป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง**

เมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวในเอกภพสัมพัทธ์แทนค่าใน $P(x)$ แล้วเป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

เมื่อ ไม่มีสมาชิกตัวใดเลยในเอกภพสัมพัทธ์ที่แทนค่าใน $P(x)$ แล้วเป็นจริง

สูตรนี้ออกสอบบ่อยมาก!!!

$\sim \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$

$\sim \exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

รู้ไว้นะ!!!

กำหนดให้ $P(x)$ คือ $3x \geq 2$ จะได้ $\sim P(x)$ คือ $3x < 2$

ตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

กำหนดให้ U คือ เอกภพสัมพัทธ์

มีทั้งหมด 8 แบบ

1) $\forall x \forall y[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำแต่ละตัวใน U แทนใน x แล้วสามารถนำทุกตัวใน U แทนใน y แล้วเป็นจริง

2) $\forall x \exists y[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำแต่ละตัวใน U แทนใน x แล้วสามารถนำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน y แล้วเป็นจริง

3) $\exists x \forall y[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน x แล้วสามารถนำทุกตัวใน U แทนใน y แล้วเป็นจริง

4) $\exists x \exists y[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน x แล้วสามารถนำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน y แล้วเป็นจริง

5) $\forall y \forall x[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำแต่ละตัวใน U แทนใน y แล้วสามารถนำทุกตัวใน U แทนใน x แล้วเป็นจริง

6) $\forall y \exists x[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำแต่ละตัวใน U แทนใน y แล้วสามารถนำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน x แล้วเป็นจริง

7) $\exists y \forall x[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน y แล้วสามารถนำทุกตัวใน U แทนใน x แล้วเป็นจริง

8) $\exists y \exists x[P(x,y)]$ เป็น จริง

   เมื่อ นำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน y แล้วสามารถนำอย่างน้อย 1 ตัวใน U แทนใน x แล้วเป็นจริง

สูตรนี้ออกสอบบ่อยมาก!!!

$\sim \forall x \forall y[P(x,y)] \equiv \exists x \exists y[\sim P(x,y)]$

$\sim \exists x \exists y[P(x,y)] \equiv \forall x \forall y[\sim P(x,y)]$

$\sim \forall x \exists y[P(x,y)] \equiv \exists x \forall y[\sim P(x,y)]$

$\sim \exists x \forall y[P(x,y)] \equiv \forall x \exists y[\sim P(x,y)]$

สิ่งที่น่าสนใจ

$\forall x \forall y[P(x,y)] \equiv \forall y \forall x[P(x,y)]$

$\exists x \exists y[P(x,y)] \equiv \exists y \exists x[P(x,y)]$