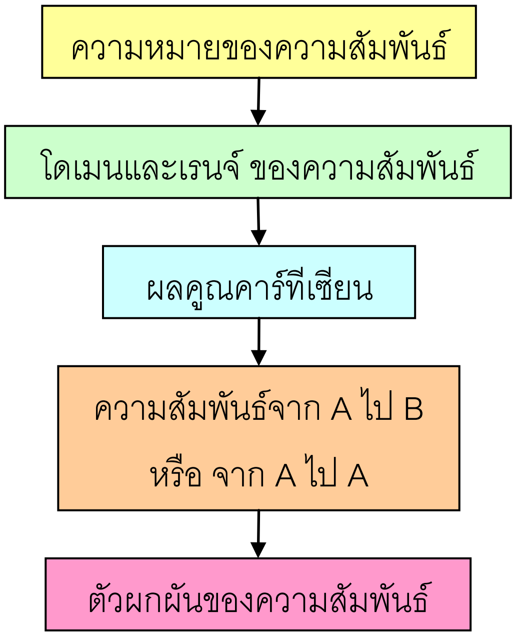
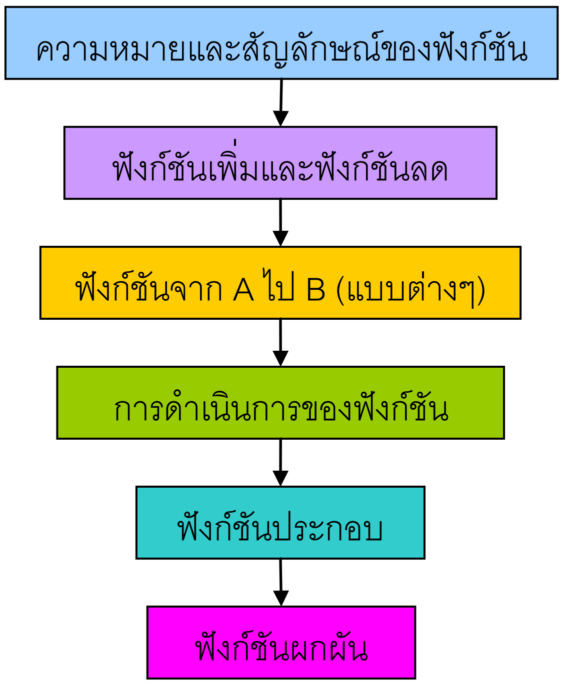
ฟังก์ชัน ม.4 เทอมปลาย สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ความสัมพันธ์



ฟังก์ชัน



ความสัมพันธ์

ความหมายของความสัมพันธ์

ในการเกี่ยวโยงระหว่างสิ่งสองสิ่ง ในทางคณิตศาสตร์จะใช้คู่อันดับ (x, y) เพื่อเกี่ยวโยงสองสิ่งนั้น

โดย ความสัมพันธ์ **คือ** เซต ซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ

เช่น $A = \{1, 2, 5\}$ ไม่เป็นความสัมพันธ์ เพราะสมาชิก**ไม่**ใช่คู่อันดับ

$B = (1, 3)$ ไม่เป็นความสัมพันธ์ เพราะ**ไม่**ใช่เซต

$r = \{(1, -1), (2, -4), (3, 5)\}$ เป็นความสัมพันธ์ เพราะเป็น เซต ซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ

โดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์

ให้ r แทนความสัมพันธ์

โดเมนของ r (สัญลักษณ์ D_r) คือเซตของ**ตัวหน้า** (x) ของแต่ละคู่อันดับใน r

เรนจ์ของ r (สัญลักษณ์ R_r) คือเซตของ**ตัวหลัง** (y) ของแต่ละคู่อันดับใน r

เช่น $r = \{(1, -3), (5, 7), (6, 8)\}$

$D_r = \{1, 5, 6\}$ $\quad R_r = \{-3, 7, 8\}$

การหาโดเมน D และเรนจ์ R ของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปสมการ

กำหนดให้

$r = \{(x, y) \in R \times R \mid \text{สมการ}\}$

หา D_r	หา R_r
1) จัดรูปสมการ ให้ $y = term$ ของ x	1) จัดรูปสมการ ให้ $x = term$ ของ y
2) หา x ที่ทำให้ y เป็นจำนวนจริง	2) หา y ที่ทำให้ x เป็นจำนวนจริง

ผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ $A=\{1, 3, 5\}$ สมาชิก 3 ตัว และ

$B=\{4, 6\}$ สมาชิก 2 ตัว

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B หรือเขียนได้ว่า $A\times B$ คือ

$$A\times B=\underbrace{\{(1,4), (1,6), (3,4), (3,6), (5,4), (5,6)\}}_{\boxed{n(A\times B)=3\times 2=6 \text{ ตัว}}}$$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ B และ A หรือเขียนได้ว่า $B\times A$ คือ

$$B\times A=\underbrace{\{(4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}}_{\boxed{n(B\times A)=2\times 3=6 \text{ ตัว}}}$$

จะเห็นได้ว่า $A\times B\neq B\times A$ แต่ $n(A\times B)=n(B\times A)$

ความสัมพันธ์จาก A ไป B หรือ จาก A ไป A

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$

โดยความสัมพันธ์นี้ เรียกว่า ความสัมพันธ์ในเซต A

****จำนวน $r = 2^{n(A \times B)}$

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของตัวหน้า (x) และตัวหลัง (y) ในแต่ละคู่อันดับ

r แทนความสัมพันธ์

r^{-1} แทนตัวผกผันของความสัมพันธ์ r

ให้ $r = \{(1,4), (3,6), (5,8)\}$

$D_r = \{1, 3, 5\}$

$R_r = \{4, 6, 8\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(4,1), (6,3), (8,5)\}$

$D_{r^{-1}} = \{4, 6, 8\}$

$R_{r^{-1}} = \{1, 3, 5\}$

*****จะเห็นได้ว่า $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

ในกรณีที่ความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปสมการบอกเงื่อนไข

เช่น $r = \{(x, y) \mid y = 5x - 4,\ x \in [1,6]\}$

เราสามารถเขียน r^{-1} ได้สองแบบคือ

แบบที่ 1

$r^{-1} = \{(y, x) \mid y = 5x - 4,\ x \in [1,6]\}$

สลับ x,y ส่วนนี้

หรือ

แบบที่ 2

$r^{-1} = \{(x, y) \mid x = 5y - 4,\ y \in [1,6]\}$

สลับ x,y ส่วนนี้

ฟังก์ชัน

ความหมายของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน **คือ** ความสัมพันธ์ ที่ไม่มีโดเมนตัวใดจับคู่กับเรนจ์มากกว่า 1 ตัว

เช่น

$r_1 = \{(1,5),(2,6),(2,9)\}$

ความสัมพันธ์นี้ **ไม่**เป็นฟังก์ชัน เพราะมีโดเมนก็คือ 2 จับคู่กับเรนจ์ มากกว่า 1 ตัว ก็คือ 6 และ 9

Note โดเมนซ้ำกันไม่ได้

$r_2 = \{(1,5),(2,5),(3,8)\}$

ความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีโดเมนตัวใดเลยที่จับคู่กับเรนจ์มากกว่า 1 ตัว

Note เรนจ์ซ้ำกันได้

วิธีการดูว่าความสัมพันธ์ที่อยู่ใน<u>รูปกราฟ</u>เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ถ้าสามารถลากเส้นตรงขนานแกน Y และสามารถตัดกราฟได้มากกว่า 1 จุด จะไม่เป็นฟังก์ชัน

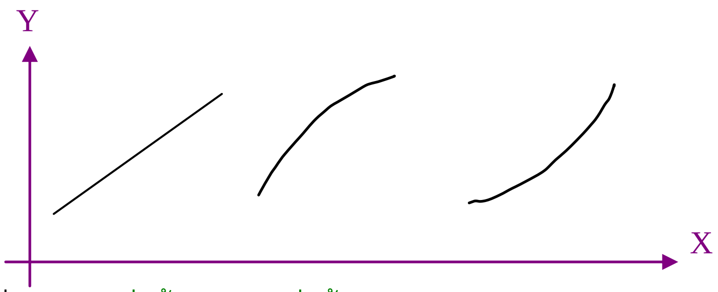
สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน

ถ้าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน เราสามารถเขียนแทน y ด้วย สัญลักษณ์ $f(x)$

$$y = f(x)$$

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

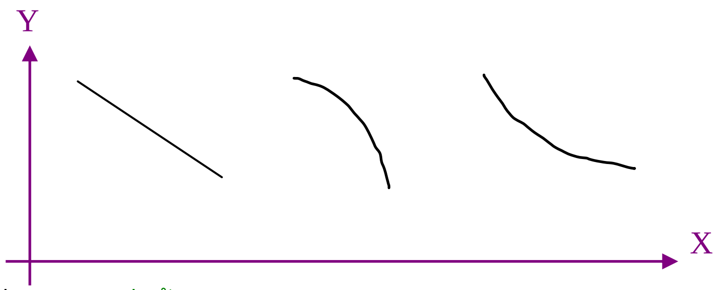
ฟังก์ชันเพิ่ม (คล้อยตาม)



เมื่อ ค่า x เพิ่มขึ้น ค่า y เพิ่มขึ้น

เมื่อ ค่า x ลดลง ค่า y ลดลง

ฟังก์ชันลด (ขัดแย้ง)



เมื่อ ค่า x เพิ่มขึ้น ค่า y ลดลง

เมื่อ ค่า x ลดลง ค่า y เพิ่มขึ้น

ฟังก์ชันจาก A ไป B (แบบต่างๆ)

ฟังก์ชันจาก A ไป B $(f : A \to B)$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

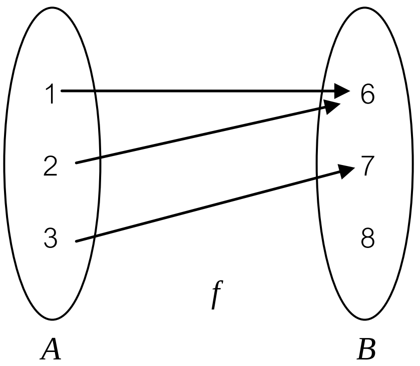
ก็ต่อเมื่อ

โดเมนของ f (D_f) **คือ (=)** เซต A

เรนจ์ของ f (R_f) **เป็นสับเซต** $(\subset)$ ของ เซต B

$$\boxed{D_f = A \text{ และ } R_f \subset B}$$

เช่น



$f = \{(1,6),(2,6),(3,7)\}$

เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B

เพราะ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B $(f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B)$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

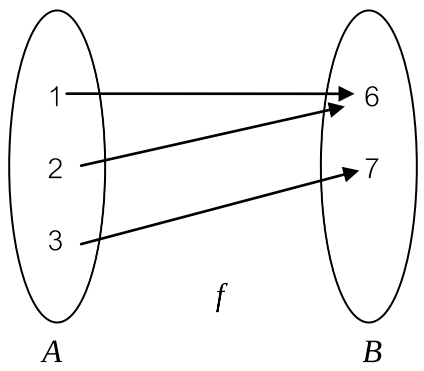
ก็ต่อเมื่อ

โดเมนของ f (D_f) **คือ (=)** เซต A

เรนจ์ของ f (R_f) **คือ (=)** เซต B

$$D_f = A \text{ และ } R_f = B$$

เช่น



$f = \{(1,6),(2,6),(3,7)\}$

เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง B

เพราะ $D_f = A$ และ $R_f = B$

ฟังก์ชันจาก A ไป B แบบ 1–1 $(f : A \xrightarrow{1-1} B)$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แบบ 1–1

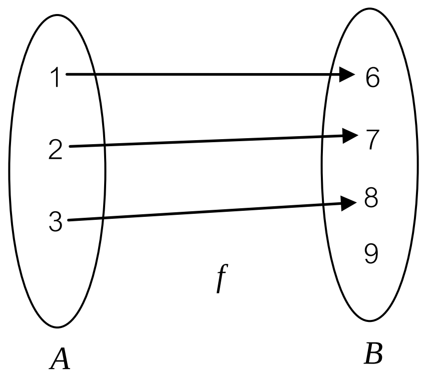
ก็ต่อเมื่อ

โดเมนของ f (D_f) **คือ (=)** เซต A

เรนจ์ของ f (R_f) **เป็นสับเซต** $(\subset)$ ของ เซต B

$D_f = A$ และ $R_f \subset B$
โดยที่ $n(D_f) = n(R_f)$

เช่น



$f = \{(1,6),(2,7),(3,8)\}$
เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B แบบ 1–1
เพราะ $n(D_f) = n(R_f)$

วิธีการดูว่าฟังก์ชันที่อยู่ในรูปกราฟเป็น ฟังก์ชัน1-1 หรือไม่

ถ้าสามารถลากเส้นตรงขนานแกน X

และสามารถตัดกราฟได้มากกว่า 1 จุด จะไม่เป็นฟังก์ชัน1-1

ฟังก์ชันจาก A ไป B แบบทั่วถึง 1–1 $\left(f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B\right)$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แบบทั่วถึง 1–1

ก็ต่อเมื่อ

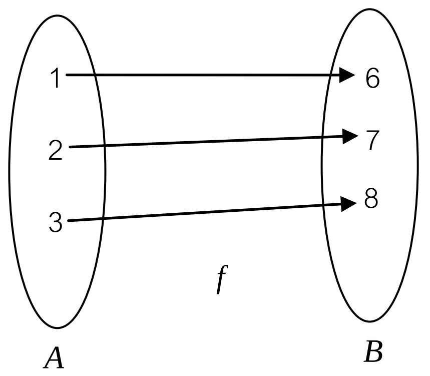
โดเมนของ f (D_f) **คือ (=)** เซต A

เรนจ์ของ f (R_f) **คือ (=)** เซต B

$D_f = A$ และ $R_f = B$

โดยที่ $n(D_f) = n(A) = n(R_f) = n(B)$

เช่น



$f = \{(1,6),(2,7),(3,8)\}$

เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B แบบ 1–1

เพราะ $D_f = A$ และ $R_f = B$

$n(D_f) = n(R_f)$

$n(A) = n(B)$

การดำเนินการของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

การบวก $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

การลบ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

การคูณ $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

โดเมนของ $f+g,\ f-g,\ f.g$ คือ $D_f \cap D_g$

การหาร $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x)\neq 0$ โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x|g(x)=0\}$

ฟังก์ชันประกอบ

$gof(x)=g(f(x))$

ความหมาย

x ไปแทนค่าใน $f(x)$ แล้วนำ $f(x)$ ที่ได้ไปแทนค่าใน $g(x)$

Note

จะหา gof ได้ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ และ

$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}$

ฟังก์ชันผกผัน

การสลับที่ระหว่าง ตำแหน่งตัวหน้าและตัวหลังในแต่ละคู่อันดับของฟังก์ชัน

เช่น

$f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ จะได้

$f^{-1} = \{(2,1),(4,3),(6,5)\}$

สำคัญมาก!!!

ให้ f เป็นฟังก์ชัน

จะมีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

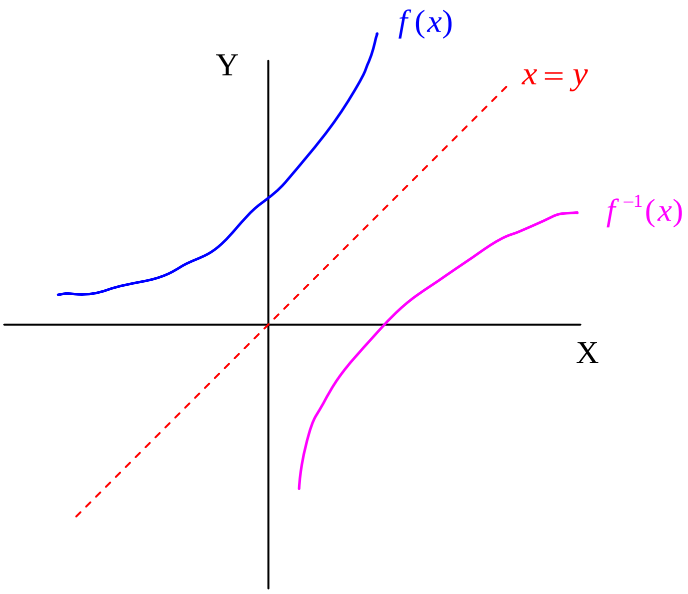
เช่น

$f = \{(1,3),(2,3),(4,5)\}$ **ไม่**เป็นฟังก์ชัน $1-1$

$f^{-1} = \{(3,1),(3,2),(5,4)\}$ จึง**ไม่**เป็นฟังก์ชัน

จึงสรุปว่า f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

การเขียนกราฟของฟังก์ชันผกผัน



กราฟ f และ f^{-1} จะมีแกนสมมาตร คือ $x = y$ แปลว่าถ้าพับกระดาษตรงแกนสมมาตร กราฟ f และ f^{-1} จะทับกันสนิท

******สูตรนี้ใช้บ่อยสุด ๆ******

$f(a) = b$ จะได้ว่า $f^{-1}(b) = a$

******สูตรนี้มีประโยชน์สุด ๆ******

$(gof)^{-1} = f^{-1} o\, g^{-1}$

******สูตรนี้ควรต้องรู้******

$f^{-1}\left(f(a)\right) = a$

$f\left(f^{-1}(a)\right) = a$