จำนวนเชิงซ้อน ม.5 เทอมปลาย สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

อินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (z^{-1})

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ($\bar{z}$)

กราฟ และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ($|z|$)

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$z = a + bi$

a คือ $\mathrm{Re}(z)$ คือ ส่วนจริงของ z

b คือ $\mathrm{Im}(z)$ คือ ส่วนจินตภาพของ z

โดยที่

$i = \sqrt{-1}$ ดังนั้น i ไม่เป็นจำนวนจริง

$i^2 = -1$

Note

ถ้า $b = 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a = 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นจำนวนจินตภาพแท้

เช่น เขียนเป็นจำนวนเชิงซ้อนนี้ให้อยู่ในรูป $a + bi$

$1+\sqrt{-4} = 1+\sqrt{4(-1)} = 1+\sqrt{4}\sqrt{-1} = 1+2i$

$1-\sqrt{-3} = 1-\sqrt{3(-1)} = 1-\sqrt{3}\sqrt{-1} = 1-\sqrt{3}i$

Note

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = (-1). i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$

หา i^n ได้โดยนำ 4 ไปหาร n

ถ้า**เหลือเศษ 1** จะได้ $i^n = i^1 = i$

ถ้า**เหลือเศษ 2** จะได้ $i^n = i^2 = -1$

ถ้า**เหลือเศษ 3** จะได้ $i^n = i^3 = -i$

ถ้า**เหลือเศษ 0 (หารลงตัว)** จะได้ $i^n = i^4 = 1$

เช่น i^{26}

นำ 4 ไปหาร 26 จะได้เศษเหลือเท่ากับ 2

ดังนั้น $i^{26} = -1$

การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

การบวก ลบจำนวนเชิงซ้อน

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ และ

$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

สมบัติ

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

การคูณจำนวนเชิงซ้อน

ให้ k เป็นค่าคงตัว จะได้ $kz_1 = ka + kbi$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\
&= ac - bd + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

สมบัติ

$z_1 z_2 = z_2 z_1$ และ

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

นำ $c - di$ คูณทั้งส่วนและเศษ เพื่อไม่ให้ตัวส่วนติดค่า i

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

สูตร

***** $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$ *****

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci - bdi}{c^2 + d^2}$$

อินเวอร์สคูณของจำนวนเชิงซ้อน (z^{-1})

ให้ $z = a + bi$

อินเวอร์สคูณของ z คือ z^{-1}

โดย $z z^{-1} = 1 \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z}$

จะได้ว่า

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi}$$

นำ $a - bi$ คูณทั้งส่วนและเศษ เพื่อไม่ให้ตัวส่วนติดค่า i

$$z^{-1} = \frac{1(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$$

สูตร

***** $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ *****

$$z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ($\bar{z}$)

$z = a + bi$

สังยุคของ z คือ $\bar{z}$

โดย $\bar{z} = a - bi$

สมบัติ

1) $\bar{\bar{z}} = z$

2) $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ จะได้ว่า $z\bar{z}$ เป็นจำนวนจริง

3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$

4) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$

5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

6) ถ้า $f(x) = 0$ มี z_1 เป็นคำตอบของสมการ

จะได้ว่า $\bar{z_1}$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

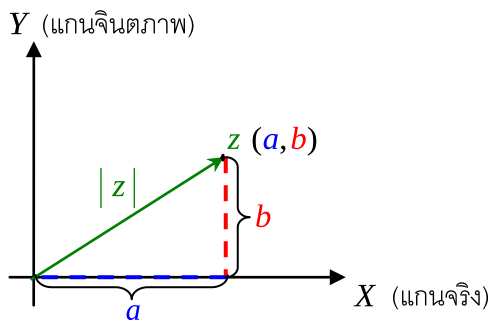
สมบัติข้อที่ 6) มีข้อแม้ว่า สัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ ต้องเป็นจำนวนจริงทั้งหมด

(สัมประสิทธิ์รวมถึงค่าคงตัวด้วยนะครับ เพราะค่าคงตัวคือสัมประสิทธิ์ของ x^0 นะ)

กราฟ และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ($|z|$)

สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดและเวกเตอร์ได้

$z = a + bi = (a, b)$



จะได้ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติ

1) $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$ ดังนั้น $|z|^2 = z\bar{z}$

2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

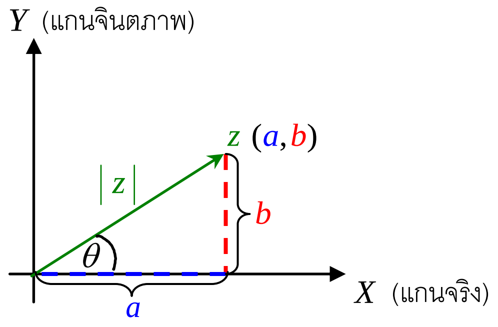
3) $|z^n| = |z|^n$

4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

5) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

6) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$



$z = a + bi = (a,b)$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \rightarrow a = |z|\cos\theta$ และ

$\sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \rightarrow b = |z|\sin\theta$

จะได้

$z = |z|\cos\theta + |z|\sin\theta i$

$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

ต้องเป็น + เสมอ

และ เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ของ z

หา z^n

จาก $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

จะได้ว่า

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

หารากที่ n ของ z

รากที่ n ของ $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

คือ

$$\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)\right]$$

โดยที่ $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

หา $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^{-1} และ $\overline{z_1}$

ให้ $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

1) $z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

   โดยเรียก $\theta_1 + \theta_2$ ว่า อาร์กิวเมนต์ของ $z_1 z_2$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

   โดยเรียก $\theta_1 - \theta_2$ ว่า อาร์กิวเมนต์ของ $\frac{z_1}{z_2}$

3) $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$

4) $\overline{z_1} = |z_1|[\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)]$