แคลคูลัสเบื้องต้น ม.6 เทอมปลาย สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ลิมิต และ ความต่อเนื่อง

ลิมิตของฟังก์ชัน

↓

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ปฏิกริยานุพันธ์

ความหมายของปฏิกริยานุพันธ์

↓

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

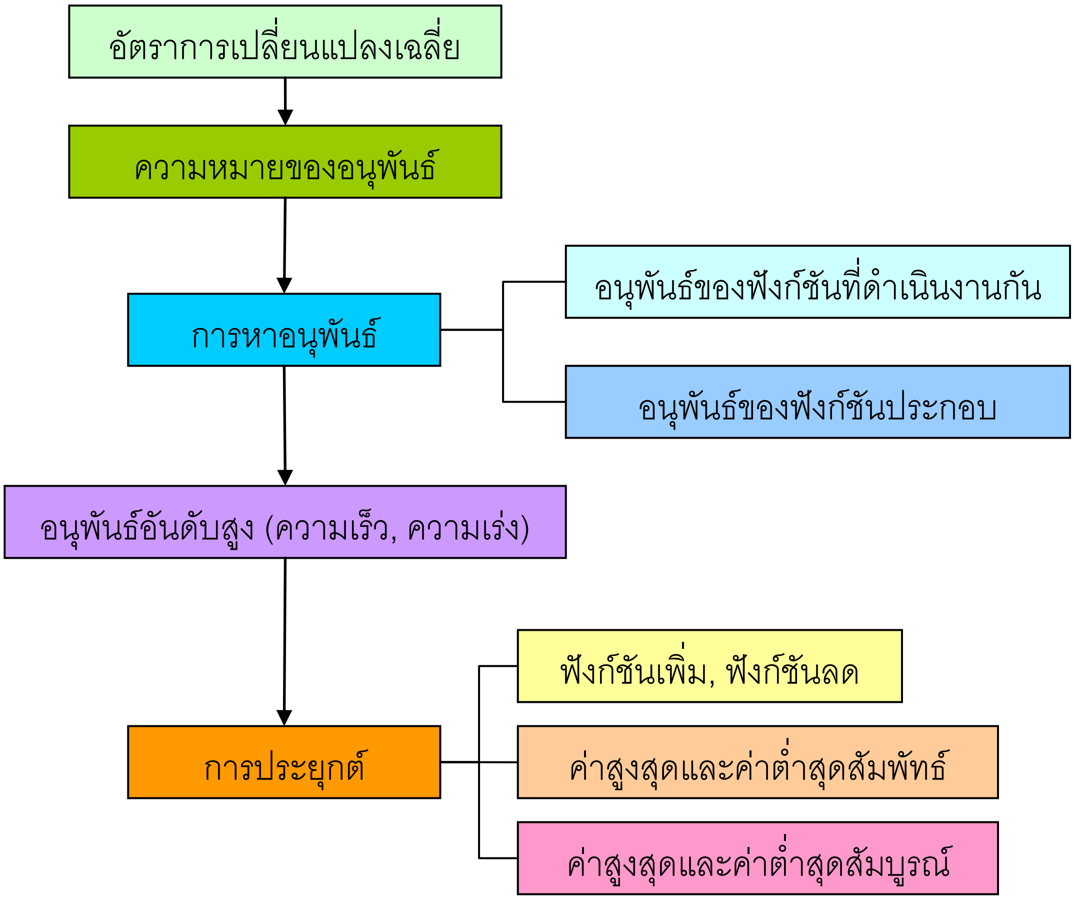
↓

ปริพันธ์จำกัดเขต

↓

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

อนุพันธ์


อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย
ความหมายของอนุพันธ์
การหาอนุพันธ์
อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ดำเนินงานกัน
อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
อนุพันธ์อันดับสูง (ความเร็ว, ความเร่ง)
การประยุกต์
ฟังก์ชันเพิ่ม, ฟังก์ชันลด
ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ลิมิต และ ความต่อเนื่อง

ลิมิตของฟังก์ชัน

$\lim_{x\to a} f(x)$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$

ถ้า $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x)=L$

หมายเหตุ

$x\to a^-$ หมายถึง x มีค่าเข้าใกล้ a โดยที่ x น้อยกว่า a

$x\to a^+$ หมายถึง x มีค่าเข้าใกล้ a โดยที่ x มากกว่า a

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

การหาค่า $\lim_{x\to a} f(x)$

ให้นำ a ไปแทนค่าใน $f(x)$

ถ้าได้

$\frac{\neq 0}{\neq 0}$ สรุป $\lim_{x\to a} f(x)=$ ค่านั้น

$\frac{= 0}{\neq 0}$ สรุป $\lim_{x\to a} f(x)=0$

$\frac{\neq 0}{= 0}$ สรุป $\lim_{x\to a} f(x)=$ หาค่าไม่ได้

$\frac{= 0}{= 0}$ ให้แยกแฟคเตอร์ หรือคอนจูเกต ตัดกัน แล้วแทนค่าใหม่

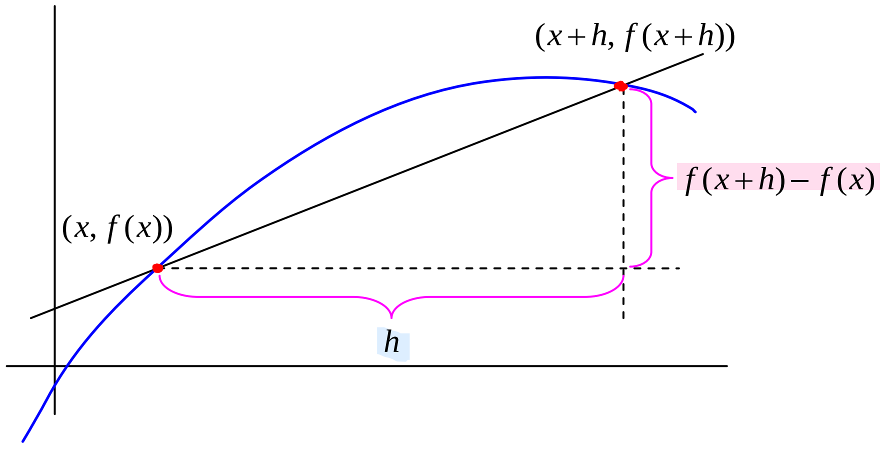
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน f จะต่อเนื่อง ที่ $x=a$ ก็ต่อเมื่อ

$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

อนุพันธ์

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

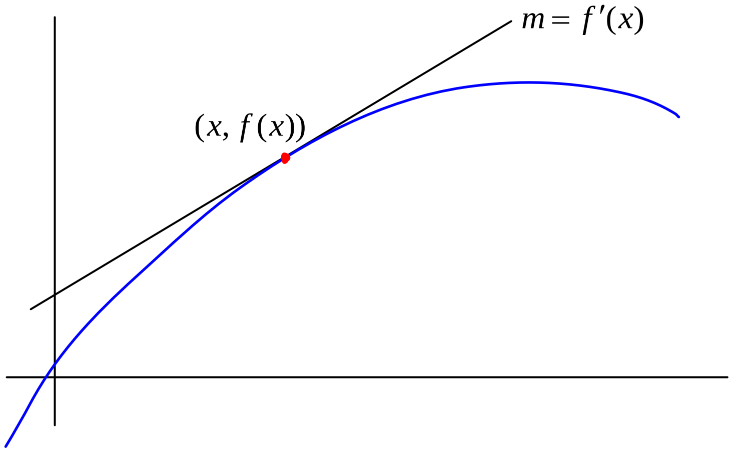


อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ หรือ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$

$= \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} =$ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด ที่เป็นจุดปลายของช่วงนั้น

ความหมายของอนุพันธ์

อนุพันธ์ **คือ** ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟที่จุดใดๆจุดหนึ่ง $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$



การหาอนุพันธ์ $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$

ให้ $f(x)=ax^{n}$ จะได้ $f'(x)=anx^{n-1}$

ให้ $f(x)=a(g(x))$ จะได้ $f'(x)=a(g'(x))$ โดยที่ a เป็นค่าคงตัว

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ดำเนินงานกัน

1) ถ้า $f(x)=g(x)\pm h(x)$ แล้ว $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

2) ถ้า $f(x)=g(x).h(x)$ แล้ว $f'(x)=g(x).h'(x)+h(x).g'(x)$

ท่อง หน้า ดิฟหลัง บวก หลัง ดิฟหน้า

3) ถ้า $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{h(x).g'(x)-g(x).h'(x)}{(h(x))^{2}}$

ท่อง ล่าง ดิฟบน ลบ บน ดิฟล่าง ส่วนด้วย ล่างกำลังสอง

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

$\left[g(f(x))\right]'=(gof)'(x)=g'(f(x)).f'(x)$

หรือ

$f(x)=\left[g(x)\right]^{n}$ จะได้ว่า $f'(x)=n\left[g(x)\right]^{n-1}.g'(x)$

ท่อง ดิฟนอก คูณ ดิฟใน

Note

ให้ $h(x)=|x|$

จะได้ว่า $h'(x)=\dfrac{x}{|x|}$

หาอนุพันธ์อันดับสูง (ความเร็ว, ความเร่ง) $f''(x)$, $f'''(x)$,...

$f''(x)$ **คือ** อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x

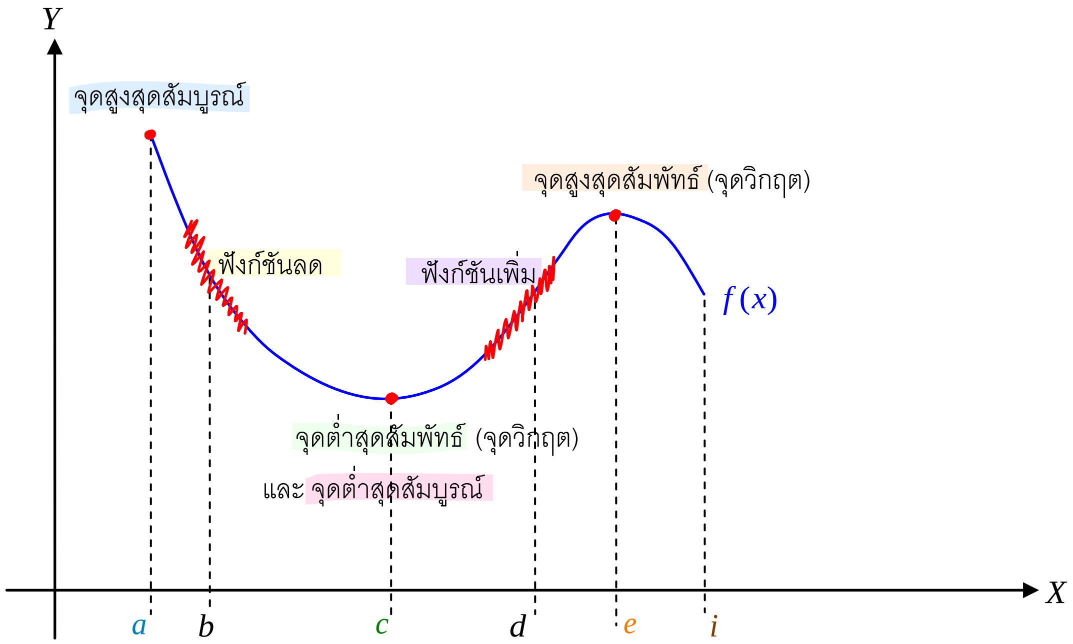
เขียนแทนได้ว่า $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$

$S =$ ระยะทาง

$S' = \frac{ds}{dt} = v =$ ความเร็ว

$S'' = v' = \frac{dv}{dt} = a =$ ความเร่ง

หาค่าสูงสุด และ ต่ำสุด (สัมบูรณ์, สัมพัทธ์) ฟังก์ชันเพิ่ม และ ฟังก์ชันลด



จุดสูงสุดสัมบูรณ์ คือ จุดที่มีค่า y สูงที่สุด ในช่วงที่กำหนดคือ $a \le x \le i$

จะได้ $f(a)$ มีค่าสูงที่สุด โดยที่ $f(a)$ คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ช่วงที่ฟังก์ชันลด (x เพิ่มขึ้น y ลดลง)

จะได้ $f'(b) < 0$

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (เป็นจุดที่ต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับจุดข้างๆ)

จะได้ $f'(c) = 0$ และ $f''(c) > 0$ โดยที่ $f(c)$ คือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ จุดที่มีค่า y ต่ำที่สุด ในช่วงที่กำหนดคือ $a \le x \le i$

จะได้ $f(c)$ มีค่าต่ำที่สุด โดยที่ $f(c)$ คือ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ช่วงที่ฟังก์ชันเพิ่ม (x เพิ่มขึ้น y เพิ่มขึ้น)

จะได้ $f'(d) > 0$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (เป็นจุดที่สูงที่สุดเมื่อเทียบกับจุดข้างๆ)

จะได้ $f'(e) = 0$ และ $f''(e) < 0$ โดยที่ $f(e)$ คือ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ ต่ำสุดสัมบูรณ์

$D_f = \{x \mid a \le x \le i\}$

1) หาค่า x ที่ $f'(x) = 0$ โดยที่ x อยู่ในช่วง $[a, i]$

สมมุติว่าได้ $x = c$ และ $x = e$

2) หา $f(a), f(c), f(e), f(i)$

ค่าไหนมากสุด เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์

ค่าไหนน้อยสุด เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์

ปฏิกิริยานุพันธ์

ความหมายของปฏิกิริยานุพันธ์

$F(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $f'(x)=F(x)$

แต่

$F(x)$ เป็นปฏิกิริยานุพันธ์หนึ่งของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $F'(x)=f(x)$

ดังนั้นการหาปฏิกิริยานุพันธ์ของ $f(x)$ ก็จะทำกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ของ $f(x)$

การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (อินทิเกรตไม่จำกัดเขต)

โดย a, c เป็นค่าคงตัว

ให้ $f(x)=a.x^n$

$$\int f(x)dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}+c$$ โดยที่ $n \neq -1$

และ

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx$$

และ

$$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

เช่น

$$\int (3x^2-2x)dx = \frac{3}{3}x^3-\frac{2}{2}x^2+c$$
$$= x^3-x^2+c$$

Note

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

แต่ถ้าเป็น $\int f'(x)\,dx = f(x)+C$

การหาปริพันธ์จำกัดเขต ((อินทิเกรตจำกัดเขต) ไม่ต้องมี $+c$)

เช่น

$$\int_2^4 (3x^2+2x)dx = \frac{3}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 \Big|_2^4$$

(นำ 4 มาแทนค่า x) $-$ (นำ 2 มาแทนค่า x)

$$= \left[4^3+4^2\right] - \left[2^3+2^2\right]$$

Note

ให้ $a<b<c$

จะได้ว่า

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

หลักในการหาพื้นที่ระหว่างกราฟ กับแกน X จาก $x=a$ ถึง $x=c$

ขั้นแรก

หาว่ากราฟตัดแกน X ที่จุดไหน โดยหาจากหลักที่ว่า จุดที่ตัดแกน X ค่า $y=0$

จากนั้น แก้สมการหาค่า x

ขั้นต่อมา

ดูว่าจุดที่กราฟตัดแกน X อยู่ระหว่างช่วงที่ต้องการหาพื้นที่หรือไม่

(คืออยู่ระหว่าง a กับ c หรือไม่)

ถ้าจุดที่กราฟตัดแกน X **ไม่**อยู่ระหว่างช่วงที่ต้องการหาพื้นที่

ให้อินทิเกรตได้เลยไม่ต้องแบ่งช่วงอินทิเกรต

เช่น กราฟตัดแกน X ที่ $x=d$

d ไม่ได้อยู่ระหว่าง a กับ c

พ.ท. $= \left|\int_a^c f(x)dx\right|$

แต่ถ้าจุดที่กราฟตัดแกน X อยู่ระหว่างช่วงที่ต้องการหาพื้นที่
ให้อินทิเกรตโดยนำจุดที่ตัดแกน X มาเป็นจุดแบ่งช่วงอินทิเกรต
เช่น เส้นโค้งตัดแกน X ที่ $x=b$
b อยู่ระหว่าง a กับ c

พ.ท. $=\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\left|\int_b^c f(x)dx\right|$

Note

ถ้า ระหว่าง $x=a$ ถึง $x=b$ กราฟอยู่**เหนือ**แกน X

จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ มีค่าเป็น**บวก** ของพื้นที่จาก $x=a$ ถึง $x=b$ ระหว่างกราฟกับแกน X

ถ้า ระหว่าง $x=b$ ถึง $x=c$ กราฟอยู่**ใต้**แกน X

จะได้ว่า $\int_b^c f(x)dx$ มีค่าเป็น**ลบ** ของพื้นที่จาก $x=b$ ถึง $x=c$ ระหว่างกราฟกับแกน X